Ronald Stöver

Zusammenfassung:
Rückwärtsanalyse des Gauß-Algorithmus

Im Folgenden sind in kompakter Form und ohne Beweise die Resultate der Rückwärtsanalyse des Gauß-Algorithmus zusammengefasst. Für Einzelheiten siehe beispielsweise [1], [2].
Sei $\tilde{x}$ eine Näherungslösung für das Gleichungssystem $Ax = b$, die via LU-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung sowie Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen berechnet wurde. Für die Rückwärtsanalyse soll $\tilde{x}$ als Lösung eines gestörten Gleichungssystems interpretiert werden, wobei hier nur Störungen von A betrachtet werden. Das Ziel ist eine Abschätzung

$$\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \leq \eta\, u + \mathcal{O}(u^2) \quad \text{für alle } \Delta A \text{ mit } (A + \Delta A)\tilde{x} = b\,,$$

wobei der Stabilitätsindikator $\eta \approx 1$ ist.
Benutzt werden die Notationen

$$|A| := \Big(|a_{ij}|\Big) \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \text{für } A = \Big(a_{ij}\Big) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

und

$$|A| \leq |B| :\Longleftrightarrow \; |a_{ij}| \leq |b_{ij}| \quad \text{für alle } i, j\,.$$

Lemma 1: Sei $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ untere Dreiecksmatrix, $\tilde{y}$ durch Vorwärtseinsetzen berechnete Lösung von $Ly = b$.

$$\Rightarrow \quad \exists\, \Delta L \in \mathbb{R}^{n\times n} \;:\quad (L + \Delta L)\tilde{y} = b\,, \quad |\Delta L| \leq n \cdot u \cdot |L| + \mathcal{O}(u^2)$$

Eine analoge Aussage gilt für obere Dreiecksmatrizen U.

Lemma 2: Sei $(\tilde{L}, \tilde{U}, \tilde{P})$ eine fehlerbehaftete LU-Zerlegung von A, sei $\tilde{x}$ die damit berechnete Näherungslösung von $Ax = b$.

$$\Rightarrow \quad \exists\, \Delta A \in \mathbb{R}^{n\times n} \;:\quad (A + \Delta A)\tilde{x} = b\,, \quad |\Delta A| \leq n \cdot \Big(3|A| + 5|\tilde{L}||\tilde{U}||\tilde{P}|\Big) \cdot u + \mathcal{O}(u^2)$$

Satz von Wilkinson [2]: Sei $\tilde{x}$ die durch den Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung berechnete Näherungslösung von $Ax = b$.

$$\Rightarrow \quad \exists\, \Delta A \in \mathbb{R}^{n\times n} \;:\quad (A + \Delta A)\tilde{x} = b\,, \quad \frac{\|\Delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty} \leq 8n^3 \cdot \rho(A) \cdot u + \mathcal{O}(u^2)$$

Dabei ist

$$\rho(A) := \frac{\max_{i,j,k} |\tilde{a}_{ij}^{(k)}|}{\|A\|_\infty}\,,$$

wenn $\max_{i,j,k} |\tilde{a}_{ij}^{(k)}|$ den größten, während der Durchführung des Algorithmus auftretenden Matrixeintrag bezeichnet.

Wie muss dieses Ergebnis interpretiert werden?

- Der Faktor $8n^3$ resultiert aus Normabschätzungen und ist praktisch vernachlässigbar.
- Allerdings gibt es Beispiele (s.u.), für die $\rho(A) = \mathcal{O}(2^{n-1})$ gilt. Also ist der Satz von Wilkinson kein formaler Beweis für die Rückwärtsstabilität des Gauß-Algorithmus – und ein solcher ist leider generell nicht bekannt.
- Aber in der Praxis hat der Gauß-Algorithmus fast ausnahmslos als stabil erwiesen. Dazu gibt es auch statistische Untersuchungen.
- Für spezielle Klassen kann man die Beschränktheit von $\rho(A)$ und damit die Rückwärtsstabilität des Gauß-Algorithmus beweisen, z.B.
  - A symmetrisch positiv definit $\quad\Rightarrow\quad \rho(A) \le 1$
  - A strikt diagonal dominant $\quad\Rightarrow\quad \rho(A) \le 2$

Bemerkung: Für die Wilkinson-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & 1 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

gilt $\quad \max_{i,j,k} |\tilde{a}_{ij}^{(k)}| = 2^{n-1}$.

Literatur

[1] Nicholas J. Higham. *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*. SIAM, Philadelphia, 2002 (2nd edition).

[2] Gene H. Golub, Charles F. van Loan. *Matrix Computations*. John Hopkins University Press, Baltimore, 1996 (3rd edition).