Dr. Ronald Stöver
Zentrum für Technomathematik
Universität Bremen

SoSe 2008

Numerische Mathematik

Übung Nr. 1

Aufgabe 1 (Abschätzung von Rechenzeiten) 5 Punkte

Bestimmen Sie die Anzahl der Additionen und Multiplikationen, die nötig sind, um eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{l\times m}$ mit einem Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ bzw. mit einer Matrix $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ zu multiplizieren.
Ein Pentium 4-Prozessor mit 3 GHz getaktet schafft ca. 6 GFLOPS, also 6 Milliarden Gleitpunktoperationen pro Sekunde. Welche Rechenzeiten sind in den Fällen $l = m = n = 10^k$ mit $k = 2, 3, \ldots, 6$ zu erwarten, wenn Sie jede Addition und Multiplikation als eine Gleitpunktoperation interpretieren? Verwenden Sie dabei geeignete Einheiten (Sekunden, Stunden, Jahre, ...).

Aufgabe 2 (Landau-Symbole) 5 Punkte

In Aufwandsabschätzungen bei numerischen Algorithmen wird häufig die Landau-Symbolik verwendet. Es seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Die *Landauschen Symbole* $\mathcal{O}(\,\cdot\,)$ und $o(\,\cdot\,)$ lassen sich folgendermaßen definieren:

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathcal{O}(g(x)) \quad (x \to x_0) \quad :\Longleftrightarrow \quad \limsup_{x\to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty \\ f(x) &= o(g(x)) \quad (x \to x_0) \quad :\Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \end{aligned}$$

Es seien $h_1 = \mathcal{O}(f)$, $h_2 = \mathcal{O}(g)$ und $h_3 = o(f)$. Zeigen Sie:

a) $\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(2)$

b) $\sin\frac{1}{x} = \mathcal{O}(1) \qquad (x \to 0)$

c) $h_1 + h_2 = \mathcal{O}(|f| + |g|) \qquad (x \to x_0)$

d) $h_1 \cdot h_2 = \mathcal{O}(f \cdot g) \qquad (x \to x_0)$

e) $h_2 \cdot h_3 = o(f \cdot g) \qquad (x \to x_0)$

Aufgabe 3 (Vorwärts/Rückwärtsaddition) 5 Punkte

a) Schreiben Sie ein Programm, das für $N \in \mathbb{N}$ die Summe

$$S(N) := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^4}$$

einmal in aufsteigender Reihenfolge (d.h. $1 + \frac{1}{16} + \ldots$), und dann in absteigender Reihenfolge (d.h. $\frac{1}{N^4} + \frac{1}{(N-1)^4} + \ldots$) berechnet.

b) Berechnen Sie damit die Summen für $N = 10^3, 10^4, 10^5$ und vergleichen Sie diese mit dem Grenzwert

$$S := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \ .$$

Welche Summationsreihenfolge liefert bessere Ergebnisse?

Aufgabe 4 (Fehlerfortpflanzung) 5 Punkte

Die Integrale

$$I_n := \int_0^1 \frac{x^n}{x+42}\,dx$$

sollen für $n \in \mathbb{N}$ mithilfe von Rekursionsformeln berechnet werden.

a) Leiten Sie eine Formel zur Berechnung von I_n her, die auf der Kenntnis des Werts I_{n-1} beruht (Hinweis: ergänzen Sie eine “nahrhafte Null”), und berechnen Sie den Startwert I_0.

b) Begründen Sie, dass $0 < I_n < I_{n-1}$ und $\frac{1}{43n} < I_{n-1} < \frac{1}{42n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

c) Benutzen Sie die Rekursionsformel, um mit `Matlab` die Werte $I_1, ..., I_{20}$ zu berechnen. Wie beurteilen Sie die Resultate?

d) Stellen Sie die Rekursionsformel so um, dass Sie ausgehend von Startwerten $I_{20} = 0$, $I_{20} = \pi$, $I_{20} = 42$ den Wert I_0 berechnen können. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit dem exakten Wert.

Abgabe bis: **15. April 2008**
10.00 Uhr
Postfach 84