

Numerische Mathematik

Übung Nr. 10

Aufgabe 1 (Randbedingungen bei der Spline-Interpolation)

4 Punkte

Das durch

$$f(t) = \sqrt{2} - \sqrt{2 - t^2}, \quad t \in [-1, 1]$$

beschriebene Kreissegment soll durch einen kubischen C^2 -Spline mit zwei Teilstücken approximiert werden, d.h. gegeben sind

$$t_0 = -1, t_1 = 0, t_2 = 1, \quad \text{und} \quad f_i = f(t_i), \quad i = 0, 1, 2.$$

Bestimmen Sie für natürliche und für vollständige Randbedingungen das entsprechende Gleichungssystem, und lösen Sie diese von Hand.

Plotten Sie die resultierenden Splines im Vergleich zum Kreissegment. Welche Art von Randbedingungen scheint hier angebrachter zu sein?

Aufgabe 2 (Kardinale B-Splines)

4 Punkte

Die Faltung \star zweier reeller Funktion f, g definiert man durch

$$(f \star g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x - y) dy$$

(wobei f, g geeignete Eigenschaften haben mögen, sodass dieses Integral existiert).

Ausgehend von der charakteristischen Funktion $\chi_{[0,1]}$ kann man mithilfe dieser Faltung die so genannten kardinalen B-Splines definieren:

$$\begin{aligned} N_0 &:= \chi_{[0,1]} \\ N_k &:= \chi_{[0,1]} \star N_{k-1} \quad \text{für } k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

- Berechnen Sie N_1, N_2 und N_3 (d.h. geben Sie stückweise Funktionsvorschriften an).
- Begründen Sie: $N_3 \in S_{\mathbb{Z},3}$, d.h. N_3 ist ein kubischer Spline zu Gitterpunkten $t_i \in \mathbb{Z}$.
- Skizzieren Sie N_0, N_1, N_2 und N_3 .

Aufgabe 3 (Quadratische C^1 -Splines)

5 Punkte

Stellen Sie – analog zum Vorgehen bei kubischen C^2 -Splines – ein Gleichungssystem zur Berechnung von quadratischen C^1 -Splines auf. Überlegen Sie sich dabei, wie Sie mit dem freien Parameter umgehen.

Implementieren Sie auf dieser Grundlage ein Programm zur Berechnung und Auswertung von quadratischen C^1 -Splines zu gegebenen Daten $(t_i, f_i), i = 0, \dots, n$, mit paarweise verschiedenen t_i . Testen Sie es (für unterschiedliche n) z.B. anhand von $t_i = i \frac{2\pi}{n}$ und $f_i = \sin(t_i)$, wobei Sie per Plot den Spline und die Sinus-Funktion vergleichen.

Was ist eine sinnvolle Vorgabe für den freien Parameter?

Aufgabe 4 (Implementierung der kubischen C^2 -Spline-Interpolation)

7 Punkte

Schreiben und implementieren Sie ein Programm zur Berechnung des natürlichen, kubischen C^2 -Splines s zu gegebenen Daten $(t_i, f_i), i = 0, \dots, n$ mit paarweise verschiedenen t_i .

Testen Sie Ihr Programm für verschiedene n anhand des Beispiels

$$t_i = -5 + 10\frac{i}{n}, \quad f_i = f(t_i), \quad i = 0, \dots, n,$$

wobei

$$f : [-5, 5] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

Vergleichen Sie s und f einmal graphisch, dann durch Betrachtung der Funktionswerte an den Intervallmittelpunkten $\frac{t_i+t_{i+1}}{2}$.

**Abgabe bis: 17. Juni 2008
10.30 Uhr
Postfach 84**