Dr. Ronald Stöver
Zentrum für Technomathematik
Universität Bremen

SoSe 2008

Numerische Mathematik
Übung Nr. 11

Aufgabe 1 (L_2-Skalarprodukt und L_2-Norm) 6 Punkte

Für $f, g \in C[a,b]$ sei definiert:

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(t)g(t)\,dt\,, \quad \|f\|_2 := \left(\int_a^b f(t)^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

a) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist offensichtlich bilinear und symmetrisch. Zeigen Sie, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ positiv definit ist.

b) Beweisen Sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \le \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \quad \text{und} \quad \int_a^b |f(t)g(t)|\,dt \le \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$$

c) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_2$ auf $C[a,b]$ eine Norm definiert.

Hinweis: Mithilfe von a) lässt sich b) ganz abstrakt beweisen. Benutzen Sie b), um c) zu zeigen.

Aufgabe 2 (Fehlerabschätzungen für Spline-Interpolation) 4 Punkte

Im Folgenden soll die Funktion f durch einen vollständigen, kubischen C^2-Spline s zu einem äquidistanten Gitter mit $t_i = a + i\,\frac{b-a}{n}$ approximiert werden. Wie groß müssen Sie n wählen, damit der Approximationsfehler $\|f - s\|_2 \le 10^{-4}$ ist?

a) $[a,b] = [0,1]$, $f(t) = \sin(2\pi t)$

b) Bessel-Funktion nullter Ordnung: $f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x \sin t)\,dt\,, \quad x \in [0,1]$

Aufgabe 3 (Mustererkennung im Teufelsmoor) 6 Punkte

Im Teufelsmoor wurden die Überreste einer Versteinerung gefunden. Zur Rekonstruktion wurde das 15 m lange und 12 m breite Fundgebiet mit einem Raster überzogen und jedes Fundstück in dieses Koordinatensystem eingezeichnet. Auf der Homepage zur Vorlesung finden Sie die Datei `fund.dat`, in der zeilenweise die Fundkoordinaten $(x_i, y_i), i = 0, \ldots, n$, aller Stücke verzeichnet sind, die den Umriss der Versteinerung angeben.
Zur Rekonstruktion wird die Gestalt des Fundstücks durch eine Kurve

$$t \mapsto \begin{pmatrix}\phi(t)\\ \psi(t)\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

beschrieben, wobei $\phi(\cdot)$ und $\psi(\cdot)$ jeweils durch einen natürlichen, kubischen C^2-Spline approximiert werden sollen. Da das Durchlaufen der Kurve mit *konstanter Geschwindigkeit* geschehen soll, lässt man die Bogenlänge der Kurve einfließen, indem man als Stützwerte die Stellen

$$t_0 := 0, \quad t_i := t_{i-1} + \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

benutzt.

a) Benutzen Sie Ihr Programm zur Bestimmung kubischer C^2-Spline-Interpolierender (vgl. Blatt 10) und berechnen Sie die Splines $S_x(\cdot)$ und $S_y(\cdot)$, die an den Stützstellen t_i die Werte $x_i = \phi(t_i)$ bzw. $y_i = \psi(t_i)$ interpolieren.

b) Unterteilen Sie das Intervall $[t_0, t_n]$ in 100 Teilintervalle, und werten Sie beide Splines auf jedem Teilintervall aus. Fertigen Sie damit eine grobe Skizze des approximierten Fundstücks an.

Aufgabe 4 (Modellierung mit Differentialgleichungen) 4 Punkte

Ein Behälter sei mit 100 l Wasser gefüllt, darin seien 10 kg Salz gelöst. Permanent fließen 5 l/min Flüssigkeit aus dem Behälter aus, dafür werden 5 l/min reines Wasser hinzugefügt und im Behälter vermischt.

a) Modellieren Sie dieses Problem durch eine Differentialgleichung und eine Anfangsbedingung.

b) Lösen Sie dieses AWP.

c) Wann hat das Gemisch im Behälter Süßwasserqualität, d.h. wann ist die Salzkonzentration unter 0,1 % gesunken?

Abgabe bis: **24. Juni 2008**
10.30 Uhr
Postfach 84