Dr. Ronald Stöver
Zentrum für Technomathematik
Universität Bremen

SoSe 2008

Numerische Mathematik

Übung Nr. 12

Aufgabe 1 (Ordnung von Einschrittverfahren) 4 Punkte

Beweisen Sie, dass das implizite Eulerverfahren die Ordnung 1 und dass die Trapezregel die Ordnung 2 hat.

Aufgabe 2 (Explizites Eulerverfahren) 6 Punkte

Schreiben Sie ein Programm, das ein gegebenes Anfangswertproblem mithilfe des expliziten Eulerverfahrens bei konstanter Schrittweite h lösen kann. Ein Aufruf dieses Programms soll in der Art

```
>> [t,x] = expeuler(@fun,[t0,T],x0,h)
```

erfolgen (vgl. Aufruf von `ode45` in Matlab). Testen Sie Ihr Programm an folgenden Beispielen, wobei Sie jeweils verschiedene Schrittweiten ausprobieren sollten. Vergleichen Sie die numerischen Lösungen mit den exakten Lösungen und kommentieren Sie Ihre Ergebnisse.

a) $\dot{x}(t) = x(t) - \sin t$, $t \in [0, 3\pi]$, $x(0) = \frac{1}{2}$
Lösung: $x(t) = \frac{1}{2}(\sin t + \cos t)$

b) $\dot{x} = \gamma x - \tau x^2$, $t \in [0, 6]$, $x(0) = 0.01$, $\gamma = 3$, $\tau = 0.2$
Lösung: $x(t) = \frac{\gamma}{\tau + \left(\frac{\gamma}{x_0} - \tau\right) \mathrm{e}^{-\gamma t}}$

c) $\dot{x} = -\frac{1}{x}\sqrt{1 - x^2}$, $t \in [0, 1)$, $x(0) = 1$
Lösung: $x(t) = \sqrt{1 - t^2}$

Aufgabe 3 (Trapezregel) 5 Punkte

Implementieren Sie die Trapezregel zur Lösung eines n-dimensionalen Anfangswertproblems bei fester Schrittweite h. Testen Sie Ihr Programm anhand des Beispiels

$$\ddot{x} + x = 1\,, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0\,, \quad t \in [0, 2]\,,$$

mit der Lösung $x(t) = 1 - \cos t$.
Überprüfen Sie numerisch die Ordnung der Trapezregel, indem Sie die globalen Fehler

$$\frac{|x(2) - x(2, h)|}{|x(2)|}$$

für Schrittweiten $h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125, \ldots$ berechnen und vergleichen.

Aufgabe 4 (Differentialgleichungen mit Matlab lösen) 5 Punkte

Untersuchen Sie folgende Differentialgleichungen numerisch mit Matlab, verwenden Sie dazu `ode45`:

a) Plotten Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems für $t \in [0, 400]$ ab dem Startwert $x(0) = 1, y(0) = 0, z(0) = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(y+z) \\ \dot{y} &= x + \alpha y \\ \dot{z} &= \beta + xz - \gamma z \end{aligned}$$

mit $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.3005$, $\gamma = 6.02$.

b) Zur Beschreibung der ebenen Bewegung eines Satelliten im Kraftfeld von Erde und Mond betrachtet man ein rotierendes kartesisches Koordinatensystem, dessen x-Achse durch die Zentren von Erde und Mond gehen und dessen y-Achse durch den gemeinsamen Schwerpunkt von Erde und Mond geht. Die Position (x, y) des Satelliten genügt dann dem System

$$\ddot{x} = x + 2\dot{y} - (1-\mu)\frac{x+\mu}{((x+\mu)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - \mu\frac{x-1+\mu}{((x-1+\mu)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\ddot{y} = y - 2\dot{x} - (1-\mu)\frac{y}{((x+\mu)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - \mu\frac{y}{((x-1+\mu)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

wobei $\mu = 1/82.45$ das Verhältnis von Mond- zur Erdmasse bezeichnet. Die Skalierung ist so, dass dem Abstand 1 gerade der (als konstant angenommene) Abstand von der Erde zum Mond entspricht.

Plotten Sie die Bahn des Satelliten für $t \in [0, 6.2]$, wenn er bei $x(0) = 1.2, y(0) = 0$ mit der Geschwindigkeit $\dot{x}(0) = 0, \dot{y}(0) = -1.05$ startet. Welche Schrittweiten wählt Matlab?

Abgabe bis: **01. Juli 2008**
10.30 Uhr
Postfach 84