Dr. Ronald Stöver
Zentrum für Technomathematik
Universität Bremen

SoSe 2008

# Numerische Mathematik

## Die Goldene Übung

**Aufgabe 1 (Ordnungsbedingungen)** 5 Punkte

Bestimmen Sie die Bedingungen, damit ein Runge-Kutta-Verfahren die Ordnung $p = 2$ hat, wenn man nicht

$$c_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}\,, \quad i = 1, \ldots, s\,,$$

fordert. Geben Sie alle derartigen expliziten RKV an.

**Aufgabe 2 (Transformationsinvarianz)** 4 Punkte

Zeigen Sie, dass Runge-Kutta-Verfahren invariant unter linearen Transformationen

$$x(t) = Tz(t)\,, \quad T \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \text{nichtsingulär,}$$

sind, d.h. bei Anwendung auf

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad \text{bzw.} \quad \dot{z}(t) = T^{-1} f(t, Tz(t))$$

und Anfangswerten $x_0$, $z_0 = T^{-1}x_0$ werden Approximationen berechnet, die $x_1 = Tz_1$ genügen.

**Aufgabe 3 (Stabilitätsgebiete)** 5 Punkte

Bestimmen Sie rechnerisch und graphisch (von Hand oder mit Matlab) die Stabilitätsgebiete für

a) die implizite Mittelpunktsregel:

$$x_1 = x_0 + hf\left(t_0 + \tfrac{h}{2}, \tfrac{x_0+x_1}{2}\right)$$

b) das Verfahren von Heun:

$$x_1 = x_0 + \tfrac{h}{2}\Big(f(t_0, x_0) + f\Big(t_0 + h, x_0 + f(t_0, x_0)\Big)\Big)$$

Hinweis: Für graphische Darstellungen in Matlab kann man den Befehl `contour` verwenden.

**Aufgabe 4 (Steife Differentialgleichungen)** 6 Punkte

a) Lösen Sie mit `ode45` die van der Pol-Gleichung

$$\ddot{x} = \mu(1 - x^2)\dot{x} - x\,, \quad x(0) = 2\,,\, \dot{x}(0) = 0$$

für $\mu = 1$ auf dem Intervall $[0, 7]$. Fertigen Sie ein Phasenporträt der Lösung an, d.h. plotten Sie $x$ gegen $\dot{x}$.
Lösen Sie dann die van der Pol-Gleichung für $\mu = 100$ auf $[0, 200]$ und für $\mu = 200$ auf $[0, 400]$. Wie sehen die Lösungen aus und wie viele Schritte hat `ode45` zur Berechnung der Approximation gemacht?
Vergleichen Sie die Lösungen und den jeweiligen Berechnungsaufwand zum dem bei Verwendung von `ode23s`.

b) Der Oregonator ist ein mathematisches Modell zur Beschreibung oszillierender chemischer Reaktionen:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= 77.27\Big(x_2 + x_1(1 - 8.375 \cdot 10^{-6} x_1 - x_2)\Big) \\
\dot{x}_2 &= \tfrac{1}{77.27}\Big(x_3 - (1 + x_1)x_2\Big) \\
\dot{x}_3 &= 0.161(x_1 - x_3)
\end{aligned}$$

Lösen diese Differentialgleichung mit `ode23s` zum Anfangswert $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = 0$ auf dem Zeitintervall $[0, 400]$. Fertigen Sie Plots der Lösungskomponenten zu einer logarithmischen Skala (Hinweis: `semilogy`) an.
Versuchen Sie dann, dieses Anfangswertproblem mit `ode45` zu lösen.

**Abgabe bis: 08. Juli 2008**
**10.30 Uhr**
**Postfach 84**