

Numerische Mathematik

Übung Nr. 2

Aufgabe 1 (Zahldarstellungen und Gleitpunktarithmetik)

3+3 Punkte

- a) Wandeln Sie die Dezimalzahlen 2.0625 und 0.3 ins Binär- und ins Hexadezimalsystem um.
Wandeln Sie die Hexadezimalzahlen $C92F$ und $3D0.A1B$ ins Dezimalsystem um.
Drücken Sie die Binärzahlen 11.0101 und 1001.011 als Dezimalzahlen aus
- b) Zur Dezimalzahl 1000 soll in dreistelliger Gleitpunktarithmetik (also in $M(10, 3, e_{\min}, e_{\max})$) eintausendmal die 1 hinzuaddiert werden. Berechnen Sie dazu die beiden alternativen Ausdrücke:

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= ((\dots(1000 + 1) + 1) + \dots + 1) + 1, \\ \Sigma_2 &= ((\dots(1 + 1) + 1) + \dots + 1) + 1000.\end{aligned}$$

Erklären Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 2 (Summationsreihenfolgen)

4 Punkte

Es seien die Vektoren

$$x = \begin{pmatrix} 2.718281828 \\ -3.141592654 \\ 1.414213562 \\ 0.5772156649 \\ 0.3010299957 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \quad \text{und} \quad y = \begin{pmatrix} 1486.2497 \\ 878366.9879 \\ -22.37492 \\ 4773714.647 \\ 0.000185049 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$$

gegeben. Das Euklidische Skalarprodukt von x und y , dessen exakter Wert

$$x^T y = 1.006571 \cdot 10^{-9}$$

ist, soll mit dem Computer bestimmt werden. Schreiben Sie ein Programm, das $x^T y$ ausgehend von den Werten $p_k := x_k y_k$ ($k = 1, \dots, 5$) auf drei Arten berechnet:

- i) $S_1 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5$
- ii) $S_2 = p_5 + p_4 + p_3 + p_2 + p_1$
- iii) $S_3 = s^+ + s^-$ mit $s^+ = \sum_{k:p_k \geq 0} p_k$, $s^- = \sum_{k:p_k < 0} p_k$

Geben Sie Ihre Werte S_k sowie die relativen Fehler für $k = 1, 2, 3$ an. Was fällt auf?

Aufgabe 3 (Auslöschung)

6 Punkte

Zur Approximation von Ableitungswerten kann man Differenzenquotienten für kleine h berechnen:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

- a) Welche relativen Fehler ergeben sich, wenn Sie auf diese Weise $\sin'(1)$ für $h = 10^{-k}$, $k = 1, \dots, 16$ approximieren?
- b) Wie lassen sich die Effekte erklären?
- c) Finden und testen Sie "bessere" Differenzenquotienten.

Aufgabe 4 (Interne Zahlendarstellung)

4 Punkte

Schreiben Sie ein Programm, das experimentell die Maschinengenauigkeit Ihres Rechners sowie die kleinste positive und die größte auf Ihrem Rechner darstellbare Zahl findet.

Hinweis: Beachten Sie die binäre Zahlendarstellung Ihres Rechners.

**Abgabe bis: 22. April 2008
10.30 Uhr
Postfach 84**