Dr. Ronald Stöver
Zentrum für Technomathematik
Universität Bremen

SoSe 2008

Numerische Mathematik
Übung Nr. 3

Aufgabe 1 (Frobenius-Matrizen) 5 Punkte

a) Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{L}_n := \left\{ L \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid L \text{ untere Dreiecksmatrix mit } l_{ii} = 1,\ 1 \le i \le n \right\},$$

$$\mathcal{U}_n := \left\{ U \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid U \text{ obere Dreiecksmatrix mit } u_{ii} \neq 0,\ 1 \le i \le n \right\},$$

Untergruppen von $Gl_n(\mathbb{R})$ bzgl. der Matrizenmultiplikation sind.

b) Eine Frobeniusmatrix ist eine Matrix $L_k \in \mathcal{L}_n$, $k = 1, \ldots, n-1$, der Form

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & & & & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & & & & \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 & & & \\ & & \vdots & -\ell_{k+1,k} & 1 & \ddots & & \\ & & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & -\ell_{n,k} & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Berechnen Sie die Inverse einer Frobeniusmatrix $L_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

ii) Berechnen Sie $L_1 \cdot L_2$ und $L_2 \cdot L_1$ für Frobeniusmatrizen der Dimension $n = 3$.

iii) Beweisen Sie eine allgemeine Formel für $L_1 \cdots L_{n-1}$.

Aufgabe 2 (Gauß-Algorithmus mit Pivotisierung) 5 Punkte

Man löse das durch

$$A = \begin{pmatrix} 0.0001 & 1 & 1 \\ 0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

beschriebene lineare Gleichungssystem mit dreistelliger Dezimalgleitpunktarithmetik (d.h. in $M(10, 3, e_{min}, e_{max})$). Verwenden Sie dabei einmal den Gaußschen Algorithmus ohne Pivotsuche und einmal mit Spaltenpivotsuche. Vergleichen Sie beide Ergebnisse mit der exakten Lösung.

Aufgabe 3 (Diagonal dominante Matrizen) 5 Punkte

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt spaltenweise strikt diagonal dominant, falls für $j = 1, \ldots, n$ gilt:

$$|a_{jj}| \quad > \quad \sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}|$$

Zeigen Sie, dass für solche Matrizen eine LU-Zerlegung ohne Pivotisierung existiert. Was können Sie über die Invertierbarkeit von A sagen?

Aufgabe 4 (Programmierung Gauß-Algorithmus) 10 Punkte

Schreiben und implementieren Sie ein Programm zur Lösung linearer Systeme $Ax = b$ mit gegebenen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$. Berechnen Sie dazu die LU-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung von A, und lösen Sie dann durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen. Achten Sie auch auf eine effiziente Speicherung.
Testen Sie Ihr Programm anhand folgender Beispiele und geben Sie jeweils die relativen Fehler

$$\frac{\|x - \hat{x}\|}{\|x\|}$$

(wobei x die exakte und $\hat{x}$ die berechnete Lösung bezeichne) an.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 20 \\ 26 \\ 28 \\ 26 \end{pmatrix}$

b) $A = H^{(n)} = \left(h_{ij}\right)_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b = \left(b_i\right)_i \in \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}\,, \quad b_i = \sum_{j=1}^{n} h_{ij}$$

Lösen Sie für $n = 2, 4, 8, 16, \ldots$.

c) A eine zufällig erzeugt Matrix (Hinweis: `Matlab`-Befehle `rand(n)`, `randn(n)`), b erzeugt analog zu b), Dimension $n = 50, 100, 500$.

Abgabe bis: **29. April 2008 (Aufgabe 1-3)**
06. Mai 2008 (Aufgabe 4)
10.30 Uhr
Postfach 84