

Numerische Mathematik

Übung Nr. 4

Aufgabe 1 (Cramersche Regel)

5 Punkte

Eine Möglichkeit, lineare Gleichungssysteme zu lösen, bietet die Cramersche Regel: Die Lösung von $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nichtsingulär, $x, b \in \mathbb{R}^n$ ist darstellbar als

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \quad i = 1, \dots, n$$

wobei A_i die Matrix ist, welche beim Ersetzen der i -ten Spalte in A durch die rechte Seite b entsteht. Die Determinanten berechnet man bekanntlich mithilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes: Für eine beliebige $m \times m$ -Matrix M und $k \in \{1, \dots, m\}$ gilt

$$\det(M) = \sum_{l=1}^m (-1)^{k+l} m_{kl} \det(M_{kl}),$$

wobei M_{kl} durch Streichen der k -ten Spalte und der l -ten Zeile aus M hervorgeht.

Wie lange dauert die Rechnung für eine 100×100 -Matrix, wenn man annimmt, dass 10^9 Operationen pro Sekunde ausgeführt werden können? Es kann angenommen werden, dass Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division jeweils als eine Operation zählen.

Umgekehrt: Wie berechnen Sie $\det(A)$, wenn Ihnen die LU-Zerlegung von A bekannt ist?

Aufgabe 2 (Gleichungssystem mit Struktur)

4 Punkte

Zu lösen sei das Gleichungssystem $Ax = b$, wobei die Matrix A die spezielle Struktur

$$A = \begin{pmatrix} R & v \\ u^T & 0 \end{pmatrix}$$

mit einer invertierbaren oberen Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$ habe.

- Geben Sie die LU-Zerlegung von A an.
- Zeigen Sie: A ist genau dann invertierbar, wenn $u^T R^{-1} v \neq 0$ ist.
- Formulieren Sie einen sparsamen Algorithmus zur Lösung von $Ax = b$. Welchen Aufwand hat dieser?

Aufgabe 3 (Bandmatrizen)

3 Punkte

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sei eine nichtsinguläre Bandmatrix der Breite m , d.h. $a_{ij} = 0$ für $|i - j| > m$. Zeigen Sie:

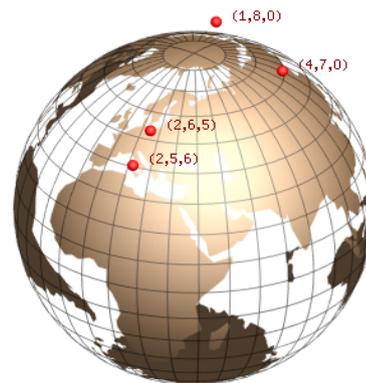
- Die Inverse einer Bandmatrix ist i.A. keine Bandmatrix.
- Wenn eine LU-Zerlegung $A = LU$ existiert, dann sind L und U ebenfalls Bandmatrizen der Breite m .

Aufgabe 4 (GPS)

3 Punkte

Ihr GPS-Empfängergerät wurde beschädigt und kann die von den Satelliten empfangenen Daten nicht mehr verarbeiten. Glücklicherweise zeigt es noch die Satellitenpositionen, bezogen auf ein kartesisches Koordinatensystem durch den Erdmittelpunkt, und die Entfernungen der Satelliten an, die aus einem Zeitsignal berechnet wurden (alle Angaben in 1000 km):

Satellit	Position	Entfernung
S_1	(1,8,0)	$\sqrt{6.5}$
S_2	(2,6,5)	$\sqrt{12.5}$
S_3	(4,7,0)	$\sqrt{9.5}$
S_4	(2,5,6)	$\sqrt{21.5}$



Stellen Sie das lineare Gleichungssystem auf, um Ihre Position in kartesischen Koordinaten aus den Daten der vier Satelliten zu bestimmen. Wo befinden Sie sich?

**Abgabe bis: 06. Mai 2008
10.30 Uhr
Postfach 84**