Dr. Ronald Stöver
Zentrum für Technomathematik
Universität Bremen SoSe 2008

Numerische Mathematik

Übung Nr. 5

Aufgabe 1 (Matrixnormen) 1+2+3 Punkte

a) Begründen Sie, dass die Frobenius-Norm keine Operatornorm ist.

b) Zeigen Sie für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \ .$$

c) Beweisen Sie für eine beliebige Operatornorm die Darstellung

$$\kappa(A) = \frac{\max_{\|x\|=1} \|Ax\|}{\min_{\|x\|=1} \|Ax\|}$$

der Konditionszahl einer invertierbaren Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Aufgabe 2 (Fehlerabschätzungen für lineare Gleichungssysteme) 2+2 Punkte

a) Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und Lösung } x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Weiter sei

$$\Delta A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.125 \end{pmatrix}$$

eine Störung von A. Wie groß darf der Fehler Δb in b sein, damit für das gestörte Gleichungssystem $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b$ die Fehlerabschätzung

$$\|\Delta x\|_2 \le 0.6$$

gilt?

b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} .4096 & .1234 & .3678 & .2943 \\ .2246 & .3872 & .4015 & .1129 \\ .3645 & .1920 & .3781 & .0643 \\ .1784 & .4002 & .2786 & .3927 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} .4043 \\ .1550 \\ .4240 \\ .2557 \end{pmatrix} .$$

Nehmen Sie an, Sie hätten sich bei der Eingabe vertippt und es müsste $.3445$ statt $.3645$ lauten. Welche Lösung erhalten Sie dann? Was kann man aus diesem Beispiel lernen?

Aufgabe 3 (Tridiagonale Gleichungssysteme) 5 Punkte

a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Tridiagonalmatrix, d.h. $a_{ij} = 0$ für $|i-j| > 1$, sodass A geschrieben werden kann als

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ d_1 & a_2 & c_2 & & \\ & d_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ & & & d_{n-1} & a_n \end{pmatrix}.$$

Geben Sie einen effizienten Algorithmus an, der die LU-Zerlegung ohne Pivotisierung von A berechnet (angenommen, sie existiert) und die Tridiagonalstruktur ausnutzt (überlegen Sie sich, welche Einträge von L und U nicht gleich Null sind).
Bestimmen Sie daran den Aufwand für die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit einer Koeffizientenmatrix A in Tridiagonalform.

b) Programmieren Sie eine Routine, die für eine tridiagonale Matrix die LU-Zerlegung gemäß a) berechnet und damit dann ein Gleichungssystem $Ax = b$ löst. Testen Sie Ihre Routine z.B. mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & & & \\ 1 & 3 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 3 & 1 \\ & & & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.5 \\ \vdots \\ 2.5 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

für $n = 100, 500, 1000$.

Aufgabe 4 (Horner-Schema) 5 Punkte

Die Auswertung eines Polynoms $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad a_k \in \mathbb{R}$, an einer Stelle $x \in \mathbb{R}$ sollte aus Kostengründen und zur Vermeidung von Overflow mit dem Horner-Schema erfolgen. Dabei wird $p(x)$ wie folgt umgeschrieben:

$$p(x) = (\ldots(a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots + a_1)x + a_0 \tag{1}$$

a) Formulieren Sie einen Algorithmus, der (1) realisiert und ausgehend von $y_n := a_n$ rekursiv $y_0 := p(x)$ für einen Wert $x \in \mathbb{R}$ berechnet.
Geben Sie die Anzahlen der benötigten elementaren Rechenoperationen zur Berechnung von $y = p(x)$ mit der naiven Form und mit dem Horner-Schema an.

b) Setzen Sie den Algorithmus aus a) um in eine MATLAB-Funktion `horner`. Die Argumente der Funktion seien der reelle Wert x und ein Vektor p, der die Koeffizienten des Polynoms enthält, und zwar in der Reihenfolge[1] `p = [` $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ `]`. Testen Sie diese Funktion z.B. anhand von $p_1(x) = 16x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81$ für $x = 1.49, 1.499, 1.501, 1.51$.

c) Zeichnen Sie mittels MATLAB den Graphen von p_1 über dem Intervall $[1, 2]$.

Abgabe bis: **13. Mai 2008**
10.30 Uhr
Postfach 84

[1] Dies ist die MATLAB-Konvention zur Darstellung von Polynomen; vergleiche z.B. die MATLAB-Funktionen `poly`, `polyval` und `roots`.