Dr. Ronald Stöver
Zentrum für Technomathematik
Universität Bremen

SoSe 2008

Numerische Mathematik

Übung Nr. 6

Aufgabe 1 (Stabilitätsanalyse) 4 Punkte

Führen Sie eine Rückwärtsanalyse für eine Polynomauswertung via Horner-Schema durch und schätzen Sie den Rückwärtsfehler für die Koeffizienten a_k ab. Setzen Sie dabei voraus, dass sowohl die Koeffizienten a_k als auch der Wert x Maschinenzahlen sind. Weiter sei $2n \cdot \mathbf{u} \ll 1$.
Welche Aussage über die numerische Stabilität des Horner-Schemas ergibt sich daraus?
Hinweis: Zeigen und benutzen Sie, dass für $|\delta_j| \leq \mathbf{u}$, $j = 1, ...k$, gilt:

$$\left| \prod_{j=1}^{k} (1 + \delta_j) \, - 1 \right| \leq (1 + \mathbf{u})^k - 1$$

Aufgabe 2 (Householder-Transformationen) 3 Punkte

Berechnen Sie per Hand mit dem Householder-Verfahren eine QR-Zerlegung von A und damit dann die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (Ausgleichsprobleme) 2+2+2+3=9 Punkte

a) Der Gezeitenstand der Nordsee werde in Abhängigkeit von der Zeit t durch

$$H(t) = h + a \sin\left(\frac{2\pi t}{12}\right) + b \cos\left(\frac{2\pi t}{12}\right)$$

mit unbekannten Konstanten h, a, b beschrieben. Folgende Messwerte liegen vor:

t in Stunden	0	2	4	6	8	10
$H(t)$ in m	1.0	1.6	1.4	0.6	0.2	0.8

Berechnen Sie optimale h, a, b durch Lösung eines Ausgleichsproblems.

b) Ein Planet beschreibt eine elliptische Bahn gegeben durch

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = 1\,,$$

dazu wurden zehn Positionen in der (x, y)-Ebene beobachtet:

x	1.02	0.95	0.87	0.77	0.67	0.56	0.44	0.30	0.16	0.01
y	0.39	0.32	0.27	0.22	0.18	0.15	0.13	0.12	0.13	0.15

Bestimmen Sie die optimalen Parameter a, b, c, d, e.
Zusatzfrage: Wie sieht die zugehörige elliptische Bahn aus?

c) Der Anhalteweg eines PKW setzt sich aus dem Reaktionsweg und dem Bremsweg zusammen:

$$a = r + b = t_s v + \frac{v^2}{2\mu g}\,,$$

wobei v die Geschwindigkeit, t_s die Reaktionszeit, $\mu \leq 1$ der Gleitreibungskoeffizient und $g = 9.81\,\frac{m}{s^2}$ die Gravitationskonstante ist. Zur Bestimmung von t_s und μ wurden gemessen:

v in km/h	30	40	50	60	70	80	90	100
a in m	15	20	25	30	45	50	60	80

Formulieren und lösen Sie ein geeignetes lineares (!) Ausgleichsproblem.

d) (Deuflhard/Hohmann) In der Chemie werden so genannte Reaktionsgeschwindigkeitskonstanten K_i bei Messtemperaturen T_i gemessen. Mithilfe des Arrhenius-Gesetzes

$$K_i = A \cdot \exp\left(-\frac{E}{RT_i}\right)$$

kann man daraus im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate den präexponentiellen Faktor A und die Aktivierungsenergie E bestimmen, die allgemeine Gaskonstante sei dafür als $R = 0.83145 \cdot 10^{-4}$ vorgegeben.
Formulieren Sie das gestellte nichtlineare Problem als lineares Ausgleichsproblem. Lösen Sie dieses mithilfe des unter

`http://www.zib.de/Numerik/numsoft/CodeLib/misc.de.html`

zur Verfügung gestellten Datensatzes.

Aufgabe 4 (Givens-Rotationen) 4 Punkte

a) Bestimmen Sie für gegebenes $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine orthogonale Matrix

$$G = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \text{ mit } c, s \in \mathbb{R}\,, \quad \text{sodass } G \cdot A = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Wie kann man G interpretieren?

b) Wie kann man die Idee aus Teil a) so erweitern, dass in einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ genau der (l, k)-Eintrag eliminiert wird (d.h. in Zeile l und Spalte k des Produkts $G \cdot A$ steht eine Null)?

c) Erläutern Sie (kurz) das Prinzip, wie man mit derartigen Matrizen eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$ auf die Form $\begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit einer oberen Dreiecksmatrix R_1 bringen kann.

Abgabe bis: 20. Mai 2008
10.30 Uhr
Postfach 84