Dr. Ronald Stöver
Zentrum für Technomathematik
Universität Bremen

SoSe 2008

Numerische Mathematik

Übung Nr. 7

Aufgabe 1 (Pseudoinverse) 3+1+1 Punkte

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Eine Matrix $Z \in \mathbb{R}^{n\times m}$ heißt Pseudoinverse (auch Moore-Penrose-Inverse) von A, falls vier Eigenschaften erfüllt sind:

$$i)\, ZA = (ZA)^T \quad ii)\, AZ = (AZ)^T \quad iii)\, AZA = A \quad iv)\, ZAZ = Z\,.$$

Zeigen Sie:

a) Die Pseudoinverse ist eindeutig bestimmt.

b) Geben Sie die Pseudoinverse für die Fälle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m > n$, rang$(A) = n$ konkret an.

c) Bestimmen Sie eine Darstellung der Pseudoinversen, die auf der Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$ basiert.

Bemerkungen: i) Üblicherweise wird die Pseudoinverse mit A^+ bezeichnet.
ii) $x_0 := A^+y$ ist die Lösung von $\|Ax - y\|_2 \to \min$ mit minimaler Euklidischer Norm.

Aufgabe 2 (Fixpunktiterationen) 3+2 Punkte

Die Lösung $x^* \in [\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}]$ der Gleichung $3x = \tan x$ soll berechnet werden.

a) Testen Sie die durch

$$\phi_1(x) := \tfrac{1}{3}\tan x \quad \text{und} \quad \phi_2(x) := \arctan(3x)\,.$$

definierten Fixpunktiterationen. Was fällt auf und wie lässt es sich erklären?

b) Sei (x_k) durch ϕ_2 und $x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ definiert. Schätzen Sie ab, nach wie vielen Iterationsschritten der Fixpunkt x^* bis auf einen Restfehler von höchstens 10^{-6} bestimmt ist.

Aufgabe 3 (Konvergenzordnung von Newton-Verfahren) 2+2 Punkte

a) Die Funktion f sei $(m+2)$-mal stetig differenzierbar und habe in x^* eine m-fache Nullstelle. Zu deren Approximation wird das Iterationsverfahren

$$x_{k+1} = x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

verwendet. Bestimmen Sie dessen (lokale) Konvergenzordnung.

b) Formulieren Sie hinreichende Bedingungen an die Funktion f, damit das Newton-Verfahren für $f(x) = 0$ die Konvergenzordnung $p \geq 3$ besitzt.

Aufgabe 4 (Anwendung des Newton-Verfahrens) 2+2+2 Punkte

a) Benutzen Sie das Newton-Verfahren zur Berechnung der Lösung $x^* \in [\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}]$ der Gleichung $3x = \tan x$. Vergleichen Sie das Konvergenzverhalten mit dem der Fixpunktiteration aus Aufgabe 2.

b) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad f(x) := 100 + \tfrac{100}{\pi}\Big(2x \cdot \cos(2x) - \sin(2x)\Big)\,.$$

Lösen Sie mithilfe des Newton-Verfahrens die Gleichungen

$$i)\ f(x) = 50\,, \qquad ii)\ f(x) = 0\,.$$

Erklären Sie Ihre Beobachtungen.

c) Begründen Sie, warum bzw. wann die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{p_i}{q_i + x}} = R \quad \text{mit} \quad p_i, q_i, R > 0$$

genau eine Lösung hat. Berechnen Sie diese für den Fall $n = 20$, $R = 5$ und Pseudozufallszahlen $p_i, q_i \in (0, 1]$ (Hinweis: `Matlab`-Funktionen `rand`).

Abgabe bis: 27. Mai 2008
10.30 Uhr
Postfach 84