Dr. Ronald Stöver
Zentrum für Technomathematik
Universität Bremen

SoSe 2008

Numerische Mathematik
Übung Nr. 8

Aufgabe 1 (Fixpunktiterationen II) 5 Punkte

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und $x^* \in I$ ein Fixpunkt von ϕ mit $|\phi'(x^*)| \neq 1$.
Zeigen Sie, dass einer der beiden folgenden Fälle eintritt:

i) Entweder ist die durch ϕ definierte Fixpunktiteration lokal konvergent, oder

ii) ϕ ist in einer Umgebung von x^* invertierbar und die durch ϕ^{-1} definierte Fixpunktiteration ist für x^* lokal konvergent.

Aufgabe 2 (Sekantenverfahren) 5 Punkte

Das Sekantenverfahren ist eine Abwandlung des Newton-Verfahrens für reellwertige Funktionen, das die Berechnung von Ableitungen vermeidet, indem diese durch Differenzenquotienten ersetzt werden:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad , k = 1, 2, 3, \ldots$$

Hier müssen zwei Startwerte x_0, x_1 vorgegeben werden.

Programmieren Sie das Sekanten-Verfahren und testen Sie es anhand der Beispiele

$$i)\; f_1(x) = \sin x - \tfrac{1}{2} \qquad ii)\; f_2(x) = \sin x - 1\,.$$

Ermitteln Sie außerdem numerisch die Konvergenzordnung p des Sekantenverfahrens, indem Sie ausgehend von $x_0 = \pi$ und $x_1 = \frac{3}{4}\pi$ fünf Iterationsschritte durchführen und jeweils die Quotienten $\frac{|x_{k+1}-x^*|}{|x_k-x^*|^p}$ berechnen.

Aufgabe 3 (Newton-Verfahren im $\mathbb{R}^n$) 6 Punkte

Programmieren Sie zwei Varianten des Newton-Verfahrens im $\mathbb{R}^n$: einmal sollen die Ableitungen direkt benutzt werden, in der zweiten Varianten sollen die Jacobi-Matrizen $DF(x^{(k)})$ mittels finiter Differenzen, d.h.

$$\left.\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j}\right|_{x=x_k} = \frac{F_i(x^{(k)} + he_j) - F_i(x^{(k)})}{h}\,,$$

wobei e_j den j-ten Einheitsvektor im $\mathbb{R}^n$ und $h \in \mathbb{R}$ die Schrittweite bezeichnet, approximiert werden.

Programmieren Sie die Verfahren mit der Iterationsvorschrift

$$\begin{aligned} A\Delta x^{(k)} &= F(x^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= x^{(k)} - \Delta x^{(k)}, \end{aligned}$$

und bestimmen Sie dabei $\Delta x^{(k)}$ mittels einer geeigneten LU-Zerlegung von A (wobei A hier für $DF(x^{(k)})$ bzw. deren Approximation steht). Das Verfahren soll abbrechen, falls $\|\Delta x^{(k)}\|_2$ kleiner einer vorgegebenen Toleranz τ ist, oder eine maximale Anzahl an Iterationen erreicht wurde.

Aufgabe 4 (Anwendung des Newton-Verfahrens im $\mathbb{R}^n$) 4 Punkte

Testen Sie Ihre Verfahren (mit $DF(x^{(k)})$ explizit bzw. Approximation durch finite Differenzen) aus Aufgabe 3 an der Funktion

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1.2 \cdot 10^5 \cdot x_2^{-1} - 1 \\ 10^{10}(x_2 + x_3)(x_1 x_2 x_3)^{-1} - 40 \\ 2 \cdot 10^5 x_1^{-1} - 2 \cdot 10^4 (x_2 + x_3)(x_2 x_3)^{-1} - 1 \end{pmatrix}$$

mit der Nullstelle $x^* \approx (0.44139 \cdot 10^5, 0.12 \cdot 10^6, 0.59445 \cdot 10^4)^T$.
Verwenden Sie verschiedene Startwerte, z.B. $x_0 = (10^4, 10^4, 10^4)^T$, und $h = 10^{-6}$ als Schrittweite. Was passiert, wenn Sie kleinere h benutzen?

Abgabe bis: **03. Juni 2008**
10.30 Uhr
Postfach 84