Dr. Ronald Stöver
Zentrum für Technomathematik
Universität Bremen

SoSe 2008

# Numerische Mathematik

## Übung Nr. 9

**Aufgabe 1 (Tschebyscheff-Polynome)** 4 Punkte

Die Funktionen $T_n : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, seien durch

$$T_n(x) := \cos\big(n \arccos x\big)$$

definiert. Zeigen Sie:

a) Die $T_n$ genügen der Drei-Term-Rekursion

$$T_0(x) = 1\,, \quad T_1(x) = x\,, \quad T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad \text{für } n = 2, 3, \ldots$$

b) $T_n \in \Pi_n$, der Koeffizient zu $x^n$ ist $2^{n-1}$, und $|T_n(x)| \leq 1$ für $x \in [-1,1]$.

c) $T_n(x) = 0 \iff x = \cos(\frac{2k-1}{2n}\pi)$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$

**Aufgabe 2 (Minimaleigenschaft der $T_n$)** 3 Punkte

a) Zeigen Sie, dass die Tschebyscheff-Polynome $T_n$ auf

$$\widetilde{\Pi}_n := \left\{ p = \sum a_k x^k \in \Pi_n \,\middle|\, a_n = 2^{n-1} \right\}$$

das Minimierungsproblem

$$\max_{x\in[-1,1]} |p(x)| \longrightarrow \min$$

lösen.

b) Wie sollte man bei der Polynominterpolation auf $[-1,1]$ die Knoten $t_i$ wählen, damit die Abschätzungen für den Interpolationsfehler möglichst günstig werden?

Hinweis: Betrachten Sie das Knotenpolynom $\omega(t) = (t-t_0)\cdots(t-t_n)$.

**Aufgabe 3 (Lagrange- und Tschebyscheff-Polynome)** 3 Punkte

a) Zeigen Sie, dass für die Lagrange-Polynome $L_i$ zu beliebigen $t_0 < \ldots < t_n$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} L_i(t) \equiv 1\,.$$

b) Plotten Sie $L_0, \ldots, L_4$ für $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3, t_4 = 4$ sowie $T_0, \ldots, T_4$.

**Aufgabe 4 (Interpolationsmethoden)** 10 Punkte

a) Schreiben Sie ein Programm mit geeigneten Unterprogrammen, das zu gegebenen Knoten $a \leq t_0 < \ldots < t_n \leq b$ und Werten $f_0, \ldots, f_n$ das Interpolationspolynom $p_n \in \Pi_n$ berechnen und auswerten kann, und zwar

   i) in der Lagrangeschen Form,

   ii) nach dem Algorithmus von Aitken-Neville,

   iii) in der Newtonschen Darstellung.

   Neben konkreter Knotenvorgabe soll das Programm die Möglichkeiten

   – äquidistante Knoten: $t_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$,

   – Tschebyscheff-Knoten: $t_i = \frac{1}{2}\Big(a + b + (b-a)\cos(\frac{2i+1}{2n+2}\pi)\Big)$,

   – gleichverteilte Zufallsknoten

   vorsehen.

b) Wie groß ist der Aufwand der Varianten i), ii), iii) gemessen in $flops$? Dabei ist zu unterscheiden, ob $p_n$ oft oder nur einmal ausgewertet wird.

c) Testen Sie Ihr Programm für $[a, b] = [-1, 1]$, die Knotenwahlen “äquidistant”, “Tschebyscheff” sowie “gleichverteilt zufällig” und entsprechende Werte $f_i = f(t_i)$, wobei die Funktionen

   i) $f(t) = |t|$

   ii) $f(t) = \sqrt{|t|}$

   iii) $f(t) = \exp(\frac{t+1}{2})$

   iv) $f(t) = \frac{1}{1+25x^2}$

   betrachtet werden sollen. Welche Darstellung des Interpolationspolynoms sollte man hier verwenden?
   Zur Veranschaulichung plotten Sie jeweils $f$ und $p_n$ (wählen Sie dafür solche $n$ aus, dass die Plots die relevanten Effekte wiedergeben).

**Abgabe bis:** **10. Juni 2008**
**10.30 Uhr**
**Postfach 84**