Proseminar zur Algebra

Tensorprodukte von Moduln

Fritz Grimpen *

30. Juli 2018

Tensorprodukte treten in natürlicher Weise in vielen Bereichen der Mathematik auf. Das Interesse an ihnen ist dabei in erster Linie formal: Gegeben sei eine bilineare Abbildung $A \times B \to G$ in eine abelsche Gruppe, wie lässt sich nun eine solche Abbildung klassifizieren? Auf diese Art und Weise finden sich viele Anwendungen des Tensorprodukts, so zum Beispiel in der Algebraischen Topologie (vgl. zum Beispiel [Hat02]). Weiterhin sind Tensorprodukte ein Beispiel für eine Struktur, die durch eine universelle Eigenschaft definiert wird und dessen Existenz nicht sofort klar ist.

Der geeignete Rahmen zur Formulierung und Untersuchung von Tensorprodukten wird durch den Begriff der Moduln gegeben. Im Folgenden sei ein Ring stets unitär.

Definition 1 (Modul). Sei R ein Ring und $(M, +)$ eine abelsche Gruppe. Weiter sei eine *Skalarmultiplikation* $\sigma : R \times M \to M$ gegeben, wobei $rm := \sigma(r, m)$ für $r \in R$, $m \in M$ geschrieben wird. Dann wird $(M, +, \sigma)$ bzw. M als *R-Linksmodul* bezeichnet, wenn

$$\begin{aligned} r(m + m') &= rm + rm', \\ (r + r')m &= rm + r'm, \\ (rr')m &= r(r'm) \text{ und} \\ 1m &= m \end{aligned}$$

für alle $r \in R$ und $m, m' \in M$ gelten.

Beispiel 2. (a) Für einen Körper K ist jeder K-Vektorraum auch ein K-Linksmodul. Umgekehrt ist jeder K-Linksmodul auch ein K-Vektorraum.

(b) Jeder Ring R ist ein R-Linksmodul mit der Multiplikation als Skalarmultiplikation.

(c) Eine abelsche Gruppe $(G, +)$ ist ein $\mathbb{Z}$-Linksmodul mit der Skalarmultiplikation

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{Z} \times G &\longrightarrow G, \\ (n, g) &\longmapsto \sum^{n} g. \end{aligned}$$

*E-Mail: grimpen@math.uni-bremen.de (Fritz Grimpen)

Damit lassen sich sowohl abelsche Gruppen als auch Vektorräume als Moduln auffassen. Insbesondere lässt sich damit jede Konstruktion auf Moduln auch auf abelsche Gruppen und Vektorräume übertragen.

Definition 3. Sei $(R, +, \tau)$ ein Ring. Dann ist durch $\tau^{\mathrm{op}} : R \times R \to R, (r, r') \mapsto \tau(r', r)$ der *Gegenring* $(R, +, \tau^{\mathrm{op}})$ (kurz R^{op}) gegeben.

Eine abelsche Gruppe $(M, +)$ zusammen mit einer Abbildung $\sigma : M \times R \to M$ heißt *R-Rechtsmodul*, wenn $(M, +, \sigma^{\mathrm{op}})$ mit $\sigma^{\mathrm{op}} : R \times M \to M, (r, m) \mapsto \sigma(m, r)$ einen R^{op}-Linksmodul bildet.

Eine Teilmenge $N \subset M$ eines R-Links- bzw. R-Rechtsmodul $(M, +, \sigma)$ heißt *R-Linksuntermodul* bzw. *R-Rechtsuntermodul*, wenn $(N, +, \sigma)$ ein R-Links- bzw. ein R-Rechtsmodul mit eingeschränkter Addition und Skalarmultiplikation ist.

Analog zu Vektorräumen lässt sich ein einfaches Kriterium angeben, um die Untermoduleigenschaft nachzuweisen:

Lemma 4 ([DF04, Proposition 10.1])**.** *Seien R ein Ring und M ein R-Linksmodul. Eine Teilmenge $N \subseteq M$ ist genau dann ein R-Untermodul von M, wenn*

(i) $N \neq \emptyset$ und

(ii) $x + ry \in N$ für alle $r \in R$ und $x, y \in N$.

Definition 5. Sei R ein Ring und seien M, N zwei R-Linksmoduln. Eine Abbildung $\varphi : M \to N$ heißt *R-Homomorphismus*, wenn

(i) $\varphi(m + m') = \varphi(m) + \varphi(m')$ und

(ii) $\varphi(rm) = r\varphi(m)$

für alle $m, m' \in M$, $r \in R$ gelten.

Sei A ein R-Rechtsmodul, B ein R-Linksmodul und G eine abelsche Gruppe. Dann heißt eine Abbildung $f : A \times B \to G$ *R-biadditiv*, wenn für alle $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ und $r \in R$ gelten:

$$\begin{aligned} f(a + a', b) &= f(a, b) + f(a', b), \\ f(a, b + b') &= f(a, b) + f(a, b') \text{ und} \\ f(ar, b) &= f(a, rb). \end{aligned}$$

Beispiel 6. (a) Sei M ein R-Modul. Dann ist die Identität $\mathrm{id}_M : M \to M$ ein R-Isomorphismus.

(b) Seien G und H zwei abelsche Gruppen aufgefasst als $\mathbb{Z}$-Linksmoduln. Jeder Gruppenhomomorphismus $f : G \to H$ ist ein $\mathbb{Z}$-Homomorphismus.

Schließlich lässt sich in Moduln, analog zu Vektorräumen, eine Faktorstruktur und ein Homomorphiesatz formulieren.

Bemerkung 7. Sei M ein R-Linksmodul und $U \subset M$ ein Untermodul. Dann lässt sich die abelsche Gruppe $(M/U, +)$ mit der wohldefinierten Skalarmultiplikation

$$\begin{aligned} R \times M/U &\longrightarrow M/U, \\ (r, m + U) &\longmapsto rm + U \end{aligned}$$

als R-Modul auffassen.

Sei weiter $f : M \to N$ ein R-Homomorphismus in einen R-Linksmodul N. Für einen Untermodul $U \subseteq \ker f$ wird ein eindeutiger, wohldefinierter R-Homomorphismus $\tilde{f} : M/U \to N$ mit $\tilde{f} \circ \pi = f$ induziert, wobei $\pi : M \to M/U$ mit $\pi : m \to m + U$ die Quotientenabbildung ist [MB88, p. 80, Theorem 26]. Mit $U = \ker f$ folgt die Isomorphie $M/\ker f \cong \operatorname{im} f$, vgl. dazu [Rot09, Theorem 2.11].

Häufig interessiert man sich für das Verhalten und die Eigenschaften einer R-biadditiven Abbildung $f : A \times B \to G$. Nun liegt es nahe, analog zu Homomorphismen, die Mengen $\ker f = f^{-1}(\{0\})$ und $\operatorname{im} f = f(A \times B)$ betrachten, um f zu untersuchen. Allerdings sind diese Mengen im Allgemeinen keine Untermoduln bzw. Untergruppen von $A \times B$ bzw. G.

Unsere Überlegung ist nun, die Abbildung f in einen Gruppenhomomorphismus $\tilde{f} : A \otimes_R B \to G$ zusammen mit einer geeigneten Gruppe $A \otimes_R B$ und einer Abbildung $h : A \times B \to A \otimes_R B$ umzuwandeln, sodass $f = \tilde{f} \circ h$ gilt. Dieses sogenannte *universal mapping problem* motiviert die Definition des Tensorprodukts:

Definition 8 (Tensorprodukt [Rot09, p. 71])**.** Sei R ein Ring, sei A ein R-Rechtsmodul und B ein R-Linksmodul. Dann heißt eine abelsche Gruppe $A \otimes_R B$ zusammen mit einer R-biadditiven Abbildung

$$h : A \times B \longrightarrow A \otimes_R B$$

Tensorprodukt von A und B über R, wenn zu jeder abelschen Gruppe G und jeder R-biadditiven Abbildung $f : A \times B \to G$ ein eindeutiger Gruppenhomomorphismus $\tilde{f} : A \otimes B \to G$ existiert, sodass $\tilde{f} \circ h = f$ gilt, also das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & A \otimes_R B \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

Für ein gegebenes Tensorprodukt $A \otimes_R B$ mit einer R-biadditiven Abbildung $h : A \times B \to A \otimes_R B$ setzen wir $a \otimes_R b := h(a, b)$ zu $a \in A, b \in B$. Wir zeigen zunächst über die universelle Eigenschaft, dass das Tensorprodukt, sofern es existiert, eindeutig bis auf Isomorphie ist.

Satz 9 (Eindeutigkeit des Tensorprodukts)**.** *Sei R ein Ring, A ein R-Rechtsmodul und B ein R-Linksmodul. Zu zwei Tensorprodukten M und N von A und B mit R-biadditiven Abbildungen $g : A \times B \to M$ bzw. $h : A \times B \to N$ existiert stets ein Gruppenisomorphismus $M \to N$.*

Beweis. Betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[ddr, bend left, "\tilde{h}"] & \\
& A \times B \arrow[u, "g"] \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "h"] & \\
N \arrow[uur, bend left, "\tilde{g}"] \arrow[rr, bend right] & & N
\end{tikzcd} .$$

Der Pfeil $N \to N$ wird durch die universelle Eigenschaft von N induziert und muss aufgrund der Eindeutigkeit die Identität $\mathrm{id}_N : N \to N$ sein. Weiter werden die Pfeile $\tilde{g} : N \to M$ und $\tilde{h} : M \to N$ durch die universelle Eigenschaften von N bzw. M induziert.

Schließlich muss aufgrund der Eindeutigkeit der induzierten Abbildungen $\tilde{h} \circ \tilde{g} = \mathrm{id}_N$ gelten, also kommutiert das Diagramm. Aus Symmetriegründen folgt weiter, dass $\tilde{g} \circ \tilde{h} = \mathrm{id}_M$, also $\tilde{h} : M \to N$ bijektiv und damit $M \cong N$. □

Um nun zu zeigen, dass das Tensorprodukt tatsächlich existiert, wählen wir zunächst eine möglichst große Gruppe, in die wir $A \times B$ einbetten können. Dazu zunächst eine Definition:

Definition 10 (Freie Moduln)**.** Ein R-Linksmodul M heißt *frei* über R, wenn eine Menge I und ein R-Isomorphismus $\bigoplus_{i \in I} R \to M$ existiert.
Ein $\mathbb{Z}$-Linksmodul wird auch als *freie abelsche Gruppe* bezeichnet.

Bemerkung 11. Sei B eine Menge. Dann existiert stets ein freier R-Linksmodul M mit Basis B, vgl. [Rot09, Proposition 2.33]. Weiter lässt sich jede Abbildung $f : B \to N$ in einen R-Linksmodul N zu einer eindeutigen Abbildung $\tilde{f} : M \to N$ fortsetzen [Rot09, Proposition 2.34].

Zur Konstruktion des Tensorprodukts bietet es sich nun an, die freie abelsche Gruppe F mit Basis $A \times B$ und eine geeignete Untergruppe S zu betrachten, sodass $h : A \times B \to F/S$ R-biadditiv wird.

Satz 12 (Konstruktion des Tensorprodukts [Rot09, Proposition 2.45])**.** *Sei A ein R-Rechtsmodul und B ein R-Linksmodul. Sei weiter F die freie abelsche Gruppe (vgl. Definition 10) mit Basis $((a,b) \mid a \in A, b \in B)$ und sei*

$$\begin{aligned} S := \big\langle &(a, b+b') - (a,b) - (a,b'),\\ &(a+a', b) - (a,b) - (a',b),\\ &(ar, b) - (a, rb)\\ &\big|\, a, a' \in A,\ b, b' \in B,\ r \in R \big\rangle \end{aligned}$$

der von den Tensoreigenschaften erzeugte R-Untermodul von F.
Dann ist F/S zusammen mit der Restklassenabbildung

$$\begin{aligned} h : A \times B &\longrightarrow F/S,\\ (a,b) &\longmapsto (a,b) + S =: a \otimes_R b. \end{aligned}$$

ein Tensorprodukt von A und B.

Beweis nach [Rot09, Proposition 2.45]. Betrachte die Injektion $\iota : A \times B \hookrightarrow F$ und die Quotientenabbildung $\pi : F \twoheadrightarrow F/S$. Dann ist per Definition $h = \pi \circ \iota$.
Zu einer R-biadditiven Abbildung $f : A \times B \to G$ betrachte nun den auf der Basis von F definierten Homomorphismus

$$\begin{aligned} \varphi : F &\longrightarrow G,\\ (a,b) &\longmapsto f(a,b). \end{aligned}$$

Dieser ist offensichtlich wohldefiniert. Weiter ist φ eine Fortsetzung von f in dem Sinne, dass $\varphi \circ \iota = f$ gilt.
Es gilt weiter $S \subseteq \ker \varphi$, denn es gelten für $a, a' \in A$, $b, b' \in B$, $r \in R$

$$\begin{aligned} \varphi((a+a', b) - (a,b) - (a',b)) &= \varphi(\iota(a+a', b) - \iota(a,b) - \iota(a',b))\\ &= f(a+a', b) - f(a,b) - f(a',b) = 0 \end{aligned}$$

und

$$\varphi((ar,b)-(a,rb)) = \varphi(\iota(ar,b)-\iota(a,rb)) = f(ar,b)-f(a,rb) = 0.$$

Analog folgt $\varphi((a,b+b')-(a,b)-(a,b')) = 0$.

Betrachte nun das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\iota"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & A \otimes B \arrow[ddl, dashed, bend left, "\tilde{f}"] \\
& F \arrow[ur, "\pi"'] \arrow[d, "\varphi"] & \\
& G &
\end{tikzcd}$$

Nach der universellen Eigenschaft der Faktorgruppe (Bemerkung 7) existiert nun eine eindeutige Abbildung $\tilde{f} : F/S \to G$ so dass $\tilde{f} \circ \pi = \varphi$. Damit folgt die Existenz und Eindeutigkeit von $\tilde{f}$, also ist F/S ein Tensorprodukt und $\tilde{f}$ die von f induzierte Abbildung. $\square$

Für die konkrete Konstruktion des Tensorprodukts finden sich noch andere Verfahren in der Literatur, vgl. zum Beispiel [Bra17, Satz 5.3.3]. Allerdings ist die konkrete Konstruktion häufig nicht relevant, wenn man Aussagen über die Elemente des Tensorprodukts treffen möchte.

Literatur

[Bra17] Martin Brandenburg. *Einführung in die Kategorientheorie*. 2. Aufl. Heidelberg: Springer Spektrum, 2017. ISBN: 978-3-662-53520-2. DOI: `10.1007/978-3-662-53521-9`.

[DF04] David S. Dummit und Richard M. Foote. *Abstract Algebra*. 3rd. ed. John Wiley & Sons, 2004. ISBN: 0-471-43334-9.

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002. ISBN: 0-521-79540-0.

[MB88] Saunders MacLane und Garrett Birkhoff. *Algebra*. 3rd. ed. New York etc.: Chelsea Publishing Company, 1988. ISBN: 0-8284-0330-9.

[Rot09] Joseph J. Rotman. *An introduction to homological algebra*. 2nd. ed. Springer, 2009. ISBN: 978-0-387-24527-0. DOI: `10.1007/b98977`.