Mathematik II für Physiker und Elektrotechniker SS04
Vordiplomklausur

20.7.2004, 13-17 Uhr

Name

Matrikelnummer

Studiengang

Tutor

1a	b	c	2	3a	b	4

5	6	7	8a	b	9	10a	b	c	11	12a	b	c	13a	b	c	d	e	$\sum$

Note:

Stoff des ersten Semesters

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie die Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 \\ -3 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Führen Sie die dazu notwendigen elementaren Zeilenumformungen explizit durch.

b) Was ist der Rang einer (nicht notwendig quadratischen) Matrix; wie kann man ihn berechnen?

c) Welches ist der Rang obiger Matrix? Warum?

Aufgabe 2

In welchen Punkten besitzt die Abbildung $f:[0,4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-6x^2+11x-8$ lokale Extremwerte? Welche dieser Extremwerte sind ein lokales Maximum, welche ein lokales Minimum? Begründen Sie Ihre Aussagen mit Hilfsmitteln der Differentialrechnung.

Aufgabe 3

Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ gegeben durch $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2+y \\ xy^2 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Ableitungsmatrix $\mathrm{D}f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) In einer Umgebung von $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ besitzt f eine Umkehrabbildung g . (Warum?) Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes über die Umkehrabbildung die Ableitungsmatrix $\mathrm{D}g\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4

Wie würden Sie vorgehen, um festzustellen, an welchen Punkten eine 2-mal stetig differenzierbare Abbildung $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ ein lokales Maximum besitzt?

Stoff des 2. Semesters

Aufgabe 5

Berechnen Sie durch „Entwicklung nach der 1. Zeile“ die Determinante der Matrix aus Aufgabe 1.

Aufgabe 6

Stellen Sie mit Hilfe des äußeren Produktes fest, ob die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 7

Sei $c:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ die Parametrisierung einer Kurve.
Wie lautet die Formel für die Länge der Kurve?
Berechnen Sie anhand dieser Formel den Umfang des Kreises mit Radius 2 um den Punkt $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

Aufgabe 8

a) Berechnen Sie durch partielle Integration das Integral $\int\limits_0^{\pi} \sin(x)\exp(x)\,\mathrm{d}\,x$

b) Berechnen Sie mit der Substitutionsregel das Integral $\int\limits_1^{2} \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{5-2x}}$

Aufgabe 9

Sei $G:=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \middle| 0\le x\le 1, 0\le y\le x^2\right\}$ (machen Sie sich ein Bild**!**) und $f(x,y)=xy$. Berechnen Sie das Integral $\int_G f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$

Aufgabe 10

a) Sei $f(x,y,z)=xz\sin(y)$. Berechnen Sie die 1-Form d*f*.
b) Zeigen Sie: $2xy\,\mathrm{dx}+(x^2+z^2)\,\mathrm{dy}+2yz\,\mathrm{dz}$ ist geschlossen.
c) Ist die 1-Form in b) sogar exakt?

Aufgabe 11

Sei $\omega=z\,\mathrm{d}\,x+x\,\mathrm{d}\,y+y\,\mathrm{d}\,z$ und $c:[-1,1]\to\mathbb{R}^3$, $c(t)=\begin{pmatrix}t\\t^2\\t^3\end{pmatrix}$. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_c \omega$.

Aufgabe 12

Betrachten Sie die Differentialgleichung $y'=2y+x$.

a) Geben Sie ein Vektorfeld im $\mathbb{R}^2$ an, dessen Stromlinien Lösungen dieser Differentialgleichung liefern. Beschreiben Sie dann im Detail, wie Sie von den Stromlinien des Vektorfelds zur Lösung der Differentialgleichung kommen.

b) Finden Sie eine Lösung $f(x)$, die der Anfangsbedingung $f(0)=1$ genügt, indem Sie zunächst die homogene Gleichung $y'=2y$ lösen. (Hier bitte kein Potenzreihenansatz!)
c) Lösen Sie die Gleichung durch einen Potenzreihenansatz.

Aufgabe 13

Sei $A=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ -1 & 3\end{pmatrix}$.
a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A.

b) A besitzt nur einen Eigenwert λ_1 . Berechnen Sie ihn!

c) Sei $c\in\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, daß $d:=Ac-\lambda_1 c$ ein Eigenvektor zum in b) gefundenen Eigenwert ist.

d) Benutzen Sie dieses Ergebnis, um durch Induktion zu zeigen: $A^n c=\lambda_1^n c+n\lambda_1^{n-1} d$

e) Benutzen Sie das Ergebnis von d) zur Berechnung von $(\exp(tA))\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.
Hinweis: Sie können alle Summanden der Exponentialreihe ausrechnen und dann die Reihe neu zusammenfassen.