

Mathematik II für Physiker und Elektrotechniker SS04

Vordiplomklausur

14.10.2004, 13-17 Uhr

Name

Matrikelnummer

Studiengang

Tutor

1a	b	2	3	4

5a	b	6	7	8	9	10a	b	11a	b	c	12a	b	c	d	Σ

Note:

Stoff des ersten Semesters

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie die Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Führen Sie die dazu notwendigen elementaren Zeilenumformungen explizit durch.

b) Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung, und es sei $f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie denjenigen Vektor $x \in \mathbb{R}^2$, für den gilt: $f(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 2

Finden Sie drei komplexe Zahlen ω mit $\omega^3 = i$.

(Hinweis:

1. Möglichkeit: Finden Sie die drei Zahlen anhand einer Skizze und machen Sie dann die Probe.
2. Möglichkeit: raten Sie eine Lösung und finden Sie die beiden anderen durch Lösen einer quadratischen Gleichung.)

Aufgabe 3

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n$, für welche divergiert sie?

Aufgabe 4

Finden Sie eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die in $x_1 = 1$ ein lokales Minimum und in $x_2 = 2$ ein lokales Maximum besitzt. Schreiben Sie Ihre Überlegungen möglichst vollständig hin. Machen Sie die Probe, daß Ihre Funktion tatsächlich die geforderten Eigenschaften besitzt.

Stoff des 2. Semesters

Aufgabe 5

- a) Berechnen Sie durch „Entwicklung nach der 1. Spalte“ die Determinante der Matrix aus Aufg. 1.
- b) Die Inverse dieser Matrix hat ebenfalls nur ganzzahlige Einträge. Nehmen wir an, Sie wüßten bereits, daß die Determinante positiv ist. Begründen Sie mit Hilfe Ihnen bekannter Sätze über Determinanten, warum die Determinante dann gleich 1 sein muß.

Aufgabe 6

Stellen Sie mit Hilfe des äußeren Produktes fest, ob die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 7

Seien $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Geben Sie eine konkrete Parametrisierung $c: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^4$ der Linie von a nach b an und rechnen Sie dann nach, daß die Länge dieser Kurve $\|b-a\|$ ist.

Aufgabe 8

Berechnen Sie $\int_1^2 x \exp(\sqrt{x^2-1}) dx$.
(Hinweis: zunächst eine Substitution, dann partielle Integration.)

Aufgabe 9

Berechnen Sie das Volumen des Körpers $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid 0 \leq x, 0 \leq y, x+y \leq 1, 0 \leq z \leq 2x^2+y^2 \right\}$.

(Machen Sie sich ein Bild!)

Aufgabe 10

- a) Zeigen Sie: Die 1-Form $\omega = dx + z dy + y dz$ ist geschlossen.

b) Eine auf ganz \mathbb{R}^3 gegebene stetig differenzierbare 1-Form wie die in a) ist sogar exakt, d.h. es gibt eine differenzierbare Funktion f mit $df = \omega$. Aufgrund des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung gilt dann $f(a) - f(0) = \int_{\gamma} \omega$, wobei γ eine Kurve ist, die den Nullpunkt mit dem Punkt $a \in \mathbb{R}^3$ verbindet. Wählen Sie eine geeignete Kurve und nutzen Sie diese Formel, um eine Stammfunktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ für ω zu berechnen. Machen Sie anschließend die Probe, daß tatsächlich $df = \omega$ gilt.

(Setzen Sie dabei am einfachsten $f(0) = 0$.)

Aufgabe 11

Betrachten Sie das homogene lin. Differentialgleichungssystem $y' = Ay$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Finden Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2 von A und zugehörige Eigenvektoren v_1, v_2 und berechnen Sie die Lösungen $\exp(tA)v_1, \exp(tA)v_2$ des homogenen Systems.

b) Finden Sie als Linearkombination der in a) gefundenen weitere Lösungen $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ des homogenen Systems mit $\varphi_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Setzen Sie $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und betrachten Sie die inhomogene Gleichung $y' = Ay + b$.

Finden Sie durch „Variation der Konstanten“ eine Lösung $\psi(t)$ der inhomogenen Gleichung, die der Anfangsbedingung $\psi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ genügt.

(Erinnern Sie sich an den Ansatz „Variation der Konstanten“:

Die matrixwertige Funktion $\phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ ist eine Fundamentallösung der homogenen Differentialgleichung, d.h. es gilt $\phi'(t) = A\phi(t)$ und $\phi(0) = E$. Man macht den Ansatz

$\psi(t) = \phi(t)v(t)$, nutzt $\psi'(t) = A\psi(t) + b$ aus und die Tatsache, daß $\phi(t)$

Fundamentallösung ist, und kann dann $v(t)$ durch Integration finden. Durch entsprechende Wahl der Integrationskonstanten erfüllt man dann die Anfangsbedingung.)

Aufgabe 12

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$.

a) A besitzt nur einen Eigenwert λ . Berechnen Sie ihn!

b) Sei $x \in \mathbb{R}^2$ ein beliebiger Vektor. Zeigen Sie für $y := Ax - \lambda x$ gilt: $Ay = \lambda y$.

c) Benutzen Sie dieses Ergebnis, um durch Induktion zu zeigen: $A^n x = \lambda^n x + n\lambda^{n-1}y$

d) Benutzen Sie das Ergebnis von c) zur Berechnung von $(\exp(tA)) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Sie können mit c) alle Summanden der Exponentialreihe ausrechnen und dann die Reihe neu zusammenfassen.