Lösungen für die Vektorfeldaufgaben der Übungsklausur

Aufgabe

Betrachten Sie das Vektorfeld $X = xy\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}$ im $\mathbb{R}^2$.

a) Welche Bedingung muß eine Kurve $c: I \to \mathbb{R}^2$ erfüllen, damit sie eine Stromlinie dieses Vektorfeldes ist?

b) Übersetzen Sie das Problem, eine Stromlinie durch den Punkt $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ zu finden, in ein Differentialgleichungssystem der Form $\begin{matrix} t' = f_1(t,x,y) \\ x' = f_2(t,x,y) \\ y' = f_3(t,x,y) \end{matrix}$ mit einer geeigneten Anfangsbedingung.

Beachten Sie, daß in der 3. Zeile dieses Systems in der ursprünglichen Fassung ein Tippfehler war.

Es muß gelten: $c'(t) = X(c(t))$. Mit $c(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ und $X\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ y^2 \end{pmatrix}$ hat man daher $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = c'(t) = X(c(t)) = \begin{pmatrix} x(t)\,y(t) \\ y^2(t) \end{pmatrix}$, also $\begin{matrix} t' = 1 \\ x' = xy \\ y' = y^2 \end{matrix}$. Damit ist $f_1(t,x,y) = 1$, $f_2(t,x,y) = xy$, $f_3(t,x,y) = y^2$. Da $c(0) = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ gefordert wird, übersetzt sich dies in die Anfangsbedingung $x(0) = 3, y(0) = 4$.

Bemerkung:
Man hätte auch im Verlauf der gesamten Aufgabe konsequent die Variablennamen *x,y,z* statt *t,x,y* verwenden können, ohne an der Bedeutung irgendetwas zu ändern. Die oben gewählte Bezeichnung liegt aber wegen der Herkunft des Vektorfeldes aus dem $\mathbb{R}^2$ mit den Koordinaten *x,y* und der Interpretation der Kurvenvariablen als Zeit näher. Im übrigen hätte man auch von vornherein mit dem einfacheren System $\begin{matrix} x' = xy \\ y' = y^2 \end{matrix}$ rechnen können.

Aufgabe

Gegeben sei die Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' = f(x, y, y')$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1, y'(0) = 2$. Wie sieht das zugehörige System erster Ordnung aus? Wie das zugehörige Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$? Durch welchen Punkt des $\mathbb{R}^3$ müssen Sie eine Stromlinie finden, um die Differentialgleichung bzw. das Differentialgleichungssystem zu lösen.

Wir setzen wie üblich $y_1' = y_2,\quad y_2' = f(x, y_1, y_2)$ und haben damit folgendes System 1. Ordnung: $\begin{matrix} x' = 1 \\ y_1' = y_2 \\ y_2' = f(x, y_1, y_2) \end{matrix}$. Diesem System entspricht jetzt das Vektorfeld $X(x, y_1, y_2) = (1, y_2, f(x, y_1, y_2)) = \frac{\partial}{\partial x} + y_2\frac{\partial}{\partial y_1} + f(x, y_1, y_2)\frac{\partial}{\partial y_2}$. Die gesuchte Stromlinie geht offenbar durch $(0,1,2)$.

Um nicht durcheinanderzukommen, muß man lediglich beachten, daß der zu Grunde gelegte $\mathbb{R}^3$ mit den Koordinaten x, y_1, y_2 betrachtet wird. Natürlich hätte man alles 1-1 auf x, y, z oder auf *t,x,y* umschreiben können.