Mathematik II für Physiker und Elektrotechniker SS04
Vordiplomklausur

14.10.2004, 13-17 Uhr

Musterlösungen

Stoff des ersten Semesters

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie die Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Führen Sie die dazu notwendigen elementaren Zeilenumformungen explizit durch.

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	3. Zeile - 1. Zeile
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	2. Zeile – 2 x 1. Zeile
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	3. Zeile + 2. Zeile
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	1. Zeile + 2. Zeile
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	1. Zeile – 3. Zeile
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	

Also ist $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ die gesuchte Inverse.

Probe mit Pari:

(13:32) gp > a=[1,-1,1;2,-1,2;1,-2,2]:

(13:33) gp > a^(-1)

[2 0 -1]

[-2 1 0]

[-3 1 1]

b) Sei $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung, und es sei $f\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-23\\10\end{pmatrix}$.

Berechnen Sie denjenigen Vektor $x\in\mathbb{R}^2$, für den gilt: $f(x)=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$!

1. Lösungsweg:

Man weiß, daß *f* durch eine 2x2-Matrix beschrieben wird. Aus $f\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-23\\10\end{pmatrix}$ folgen sofort 4 lineare Gleichungen für die 4 Koeffizienten. Nach Lösung dieses Gleichungssystems kennt man die Koeffizienten und die Gleichung $f(x)=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ erscheint als lineares Gleichungssystem von zwei Gleichungen mit zwei Unbestimmten.

Also:

$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-23\\10\end{pmatrix}$. Ausmultiplizieren ergibt:

$a-b=7,\ -3a+4b=-23,\ c-d=-3,\ -3c+4d=10$.

Aus der ersten Gleichung erhält man $b=a-7$, was in die zweite Gleichung eingesetzt zu $-23=-3a+4(a-7)=-3a+4a-28=a-28$ und damit zu $a=5$ und $b=-2$ führt. Ähnlich erhält man $d=c+3$ und $10=-3c+4(c+3)=-3c+4c+12=c+12$, also $c=-2$ und $d=1$.

Jetzt wird aus $f(x)=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -2\\-2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$. Also haben wir lineare Gleichungen $5x_1-2x_2=2,\ -2x_1+x_2=3$. Aus der zweiten ergibt sich $x_2=2x_1+3$, was eingesetzt in die erste zu $2=5x_1-2(2x_1+3)=5x_1-4x_1-6=x_1-6$ und damit zu $x_1=8$ und $x_2=19$ führt .

Insgesamt also: $f\begin{pmatrix}8\\19\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

2. Lösungsweg

Man schreibt $x=\lambda\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ und erhält

$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=f(x)=f\left(\lambda\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}\right)=\lambda f\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\mu f\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-23\\10\end{pmatrix}$. Damit haben wir die zwei Gleichungen $7\lambda-23\mu=2,\ -3\lambda+10\mu=3$, also $21\lambda-69\mu=6,\ -21\lambda+70\mu=21$, woraus sich sofort $\mu=27$ und $\lambda=89$ ergibt. Damit haben wir

$x=\lambda\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}=89\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+27\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\19\end{pmatrix}$, also wie beim ersten Lösungsweg.

Aufgabe 2

Finden Sie drei komplexe Zahlen ω mit $\omega^3=i$.

1. Möglichkeit: Finden Sie die drei Zahlen anhand einer Skizze und machen Sie dann die Probe.

Jede der gesuchten komplexen Zahlen liegt auf dem Einheitskreis. Beim Potenzieren verdreifacht sich der Winkel, den ω mit der positiven x-Achse bildet. Da *i* bei 90° liegt, sollte ω_1 bei 30° liegen. Damit ist $\omega=\cos(30°)+i\sin(30°)=\frac{\sqrt{(3)}}{2}+\frac{1}{2}i$. ω_2 liegt 120° weiter bei 150° und ω_3 nochmals 120° weiter bei 270°. Damit ist $\omega_2=\frac{-\sqrt{(3)}}{2}+\frac{1}{2}i$ und $\omega_3=-i$. Die Probe wird dem Leser überlassen.

2. Möglichkeit: raten Sie eine Lösung und finden Sie die beiden anderen durch Lösen einer quadratischen Gleichung.

Durch Probieren findet man schnell die Lösung $\omega=-i$. Da wir die 3 Nullstellen des Polynoms z^3-i suchen und jetzt eine kennen, führen wir die Polynomdivision $(z^3-i):(z+i)=z^2+iz-1$ durch und müssen jetzt nur noch mit der p-q-Formel die beiden Nullstellen des Polynoms $(z^3-i):(z+i)=z^2+iz-1$ finden, also $\omega_{1,2}=\frac{i}{2}\pm\sqrt{(\frac{-1}{4}+1)}=\pm\frac{\sqrt{(3)}}{2}+\frac{1}{2}i$, womit wir dieselben Lösungen wie beim ersten Lösungsweg erhalten haben.

Aufgabe 3

Für welche $x\in\mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} n^3x^n$, für welche divergiert sie?

Wir betrachten also die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n=n^3x^n$. Wir berechnen

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3|x|^{n+1}}{n^3|x|^n}=|x|\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3=|x| \quad ,$$

also konvergiert nach dem Quotientenkriterium die Reihe absolut für $|x|<1$ und sie divergiert für $|x|>1$. Ist $|x|=1$, so divergiert die Reihe, weil die Summanden (a_n) keine Nullfolge bilden.

Aufgabe 4

Finden Sie eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die in $x_1 = 1$ ein lokales Minimum und in $x_2 = 2$ ein lokales Maximum besitzt. Schreiben Sie Ihre Überlegungen möglichst vollständig hin.
Machen Sie die Probe, daß Ihre Funktion tatsächlich die geforderten Eigenschaften besitzt.

Eine Möglichkeit:
Man könnte sich die Funktion $f(x) = \cos(ax+b)$ entsprechend anpassen.
Mit $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}\right)$ haben wir offenbar ein Wellental des Kosinus an der Stelle 1 und einen Wellenberg an der Stelle 2.

Offenbar ist *f* auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und beliebig oft differenzierbar, und mit Anwendung der Kettenregel findet man $f'(x) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}\right)$ und $f''(x) = -\frac{\pi^2}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}\right)$.
Man hat $f'(1) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}\sin(\pi) = 0$ und

$$f''(1) = -\frac{\pi^2}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}2 + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{2}\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -\frac{\pi^2}{2} < 0 \quad .$$

Also besitzt *f* in $x_1 = 1$ ein lokales Minimum.

Entsprechend rechnet man jetzt für $x_2 = 2$ $f'(2) = 0$ und $f''(0) > 0$ nach.

Andere Möglichkeit:
Von Polynomen dritten Grades wissen wir, daß bei entsprechenden Koeffizienten ein Berg und ein Tal im Graphen auftreten. Da in der Aufgabe zuerst der Berg und dann das Tal kommt, sollte die Sache mit $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx$ bei passender Wahl von $a, b \in \mathbb{R}$ funktionieren.

Wir hätten dann $f'(x) = -3x^2 + 2ax + b$.
Wir möchten, daß f' Nullstellen in $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ besitzt und machen daher für f' den Ansatz $f'(x) = -3x^2 + 2ax + b = -3(x-1)(x-2) = -3x^2 + 9x - 6$. Dementsprechend setzen wir $a = \frac{9}{2},\ b = -6$ und untersuchen ab jetzt die Funktion $f(x) = -x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 6x$.

Wir haben also $f'(x) = -3x^2 + 9x - 6$ mit den eben konstruierten Nullstellen $x_1 = 1, x_2 = 2$.
Jetzt ist noch zu prüfen, ob $f''(x_1) > 0$ und $f''(x_2) < 0$.

Es ist $f''(x) = -6x + 9$, also $f''(1) = -6 + 9 = 3 > 0$ und $f''(2) = -12 + 9 = -3 < 0$.

Also hat unser *f* die gewünschten Eigenschaften.

Stoff des 2. Semesters

Aufgabe 5

a) Berechnen Sie durch „Entwicklung nach der 1. Spalte“ die Determinante der Matrix aus Aufg. 1.

A_{ij} sei die Matrix, die aus der Matrix $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}$ durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht. Bei der „Entwicklung nach der 1. Spalte“ wird die Determinante nach der Formel $\det A=|A|=a_{11}|A_{11}|-a_{21}|A_{21}|+a_{31}|A_{31}|$ berechnet. Speziell in unserem Fall ergibt dies

$$|A|=1\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -2 & 2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -2 & 2\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot 2-2\cdot 0+1\cdot(-1)=1$$

b) Die Inverse dieser Matrix hat ebenfalls nur ganzzahlige Einträge. Nehmen wir an, Sie wüßten bereits, daß die Determinante positiv ist. Begründen Sie mit Hilfe Ihnen bekannter Sätze über Determinanten, warum die Determinante dann gleich 1 sein muß.

Sei $B=A^{-1}$. Dann ist $AB=E$, also $\det A \det B=1$. Weil A und B nur ganzzahlige Einträge besitzen, sind auch die Determinanten ganze Zahlen. Wir haben also ein Produkt von ganzen Zahlen, welches 1 ergibt. Dies ist offenbar nur dann möglich, wenn beide Zahlen gleich 1 oder beide Zahlen gleich -1 sind. Da die Determinante positiv sein sollte, muß sie gleich 1 sein.

Aufgabe 6

Stellen Sie mit Hilfe des äußeren Produktes fest, ob die Vektoren $\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 4\\ -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 2\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind.

Vektoren sind genau dann linear unabhängig, wenn ihr äußeres Produkt ungleich Null ist. Wir berechnen zuerst das Produkt der beiden letzten Vektoren:

$(e_2+e_4)\wedge(e_1+2e_2+2e_3)=-e_1\wedge e_2+2e_2\wedge e_3-e_1\wedge e_4-2e_2\wedge e_4-2e_3\wedge e_4$ .Multiplizieren wir dieses Ergebnis mit dem ersten Vektor, also mit $2e_1+3e_2+4e_3-e_4$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}&4e_1\wedge e_2\wedge e_3-4e_1\wedge e_2\wedge e_4-4e_1\wedge e_3\wedge e_4\\ &+3e_1\wedge e_2\wedge e_4-6e_2\wedge e_3\wedge e_4\\ &-4e_1\wedge e_2\wedge e_3+4e_1\wedge e_3\wedge e_4+8e_2\wedge e_3\wedge e_4\\ &+e_1\wedge e_2\wedge e_4-2e_2\wedge e_3\wedge e_4\end{aligned}$$

Umordnen dieser Summanden ergibt

$$\begin{aligned}&4e_1\wedge e_2\wedge e_3-4e_1\wedge e_2\wedge e_3\\ &-4e_1\wedge e_2\wedge e_4+3e_1\wedge e_2\wedge e_4+e_1\wedge e_2\wedge e_4\\ &-4e_1\wedge e_3\wedge e_4+4e_1\wedge e_3\wedge e_4\\ &-6e_2\wedge e_3\wedge e_4+8e_2\wedge e_3\wedge e_4-2e_2\wedge e_3\wedge e_4\end{aligned}$$

Offenbar heben sich alle Summanden weg, das Ergebnis ist Null, und die drei Vektoren sind daher linear abhängig.

Aufgabe 7

Seien $a=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4$. Geben Sie eine konkrete Parametrisierung $c:[0,1]\to\mathbb{R}^4$ der Linie von *a* nach *b* an und rechnen Sie dann nach, daß die Länge dieser Kurve $\|b-a\|$ ist.

Die einfachste Parametrisierung der Verbindungsstrecke von *a* nach *b* ist $c(t)=a+t(b-a)$. Man sieht insbesondere sofort, daß $c(0)=a$ und $c(1)=b$. *c* ist offenbar eine stetig differenzierbare Kurve, also können wir die Länge über das Längenintegral $\int_0^1 \|c'(t)\|\,\mathrm{d}t$ berechnen . Weil $c'(t)=b-a$, ist dieses Integral gleich $\|b-a\|\int_0^1 \mathrm{d}t=\|b-a\|$.

Aufgabe 8

Berechnen Sie $\int_1^2 x\exp(\sqrt{(x^2-1)})\,\mathrm{d}x$.
(Hinweis: zunächst eine Substitution, dann partielle Integration.)

Wir substituieren $y=\sqrt{(x^2-1)}$; mit der Kettenregel ergibt sich $\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\frac{2x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2-1)}}=\frac{x\,\mathrm{d}x}{y}$, also $y\,\mathrm{d}y=x\,\mathrm{d}x$ und wir erhalten daher $\int_1^2 x\exp(\sqrt{(x^2-1)})\,\mathrm{d}x=\int_0^{\sqrt{3}} y\exp(y)\,\mathrm{d}y$. Mit dem Ansatz $u=y, v=\exp(y)$ ist dieses Integral gleich

$$\int_0^{\sqrt{3}} uv'\,\mathrm{d}y=uv|_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}} u'v\,\mathrm{d}y=y\exp(y)|_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}\exp(y)\,\mathrm{d}y=\sqrt{3}\exp(\sqrt{3})-\exp(\sqrt{3})+e$$

Aufgabe 9

Berechnen Sie das Volumen des Körpers $K=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid 0\le x, 0\le y, x+y\le 1, 0\le z\le 2x^2+y^2\right\}$.

(Machen Sie sich ein Bild**!**)

Es handelt sich um einen den Körper, der unter dem Graphen der Funktion $f(x,y)=2x^2+y^2$

über dem durch die Punkte $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ gegebenen Dreieck Δ der x-y-Ebene liegt. Also ist sein Volumen gleich dem Integral

$$\iint_{\Delta} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x}(2x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{1} 2x^2\left(\int_{y=0}^{1-x}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x + \int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=0}^{1-x} y^2\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \quad .$$

Die Einzelintegrale lassen sich jetzt elementar berechnen.

Aufgabe 10

a) Zeigen Sie: Die 1-Form $\omega = \mathrm{dx} + z\,\mathrm{dy} + y\,\mathrm{dz}$ ist geschlossen.

Es ist $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = 0 - \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = 0$, also ist ω geschlossen.

b) Eine auf ganz $\mathbb{R}^3$ gegebene stetig differenzierbare 1-Form wie die in a) ist sogar exakt, d.h. es gibt eine differenzierbare Funktion f mit $\mathrm{d}f = \omega$. Aufgrund des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung gilt dann $f(a) - f(0) = \int_{\gamma} \omega$, wobei γ eine Kurve ist, die den Nullpunkt mit dem Punkt $a \in \mathbb{R}^3$ verbindet. Wählen Sie eine geeignete Kurve und nutzen Sie diese Formel, um eine Stammfunktion $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ für ω zu berechnen. Machen Sie anschließend die Probe, daß tatsächlich $\mathrm{d}f = \omega$ gilt.

(Setzen Sie dabei am einfachsten $f(0) = 0$.)

Wir parametrisieren die Strecke vom Nullpunkt zum Punkt $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ durch $\gamma(t) = t\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}tx\\ty\\tz\end{pmatrix}$.

Dann haben wir

$$f(x,y,z) = \int_{\gamma}\omega = \int_0^1 \left(\gamma_1'(t) + (tz)\gamma_2'(t) + (ty)\gamma_3'(t)\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 x\,\mathrm{d}t + \int_0^1 tzy\,\mathrm{dt} + \int_0^1 tyz\,\mathrm{d}t \quad .$$

Das erste dieser Integrale ist gleich x, das zweite $\frac{1}{2}yz$, das dritte ebenfalls $\frac{1}{2}yz$, insgesamt also $f(x,y,z) = x + yz$. Zur Probe errechnet man sofort $\mathrm{d}f = \mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z = \omega$.

Aufgabe 11

Betrachten Sie das homogene lin. Differentialgleichungssystem $y'=Ay$ mit $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$.

a) Finden Sie die Eigenwerte $\lambda_{1,}\lambda_2$ von A und zugehörige Eigenvektoren $v_{1,}v_2$ und berechnen Sie die Lösungen $\exp(tA)v_{1,}\exp(tA)v_2$ des homogenen Systems.

Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms also von

$\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ -4 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-8=\lambda^2-2\lambda-7$. Daher $\lambda_{1,2}=1\pm\sqrt{8}=1\pm2\sqrt{2}$.

Es gibt daher eine nicht-triviale Lösung des homogenen Systems $(\lambda_1 E-A)x=0$, also

$\begin{pmatrix}\lambda_1-1 & -2\\ -4 & \lambda_1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, also $2\sqrt{2}x_1-2x_2=0$, woraus $x_2=\sqrt{2}x_1$ folgt und demnach.

$v_1=\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$ Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 ist und dann genauso, daß $v_2=\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$ Eigenvektor zum Eigenwert λ_2 ist.

Daher ergibt sich beim Einsetzen in die Exponentialreihe

$\exp(tA)v_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n}!A^n(v_1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n}!\lambda_1^n(v_1)=\exp(\lambda_1 t)v_1$, und ebenso

$\exp(tA)v_2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n}!A^n(v_1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n}!\lambda_1^n(v_1)=\exp(\lambda_2 t)v_2$.

b) Finden Sie als Linearkombination der in a) gefundenen weitere Lösungen $\varphi_1(t),\varphi_2(t)$ des homogenen Systems mit $\varphi_1(0)=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\varphi_2(0)=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$.

Die in a) gefundenen Lösungen, nennen wir sie $\psi_1(t),\psi_2(t)$ genügen der Anfangsbedingung $\psi_1(0)=v_{1,}\psi_2(0)=v_2$. Man muß also Linearkombinationen $a_{11}v_1+a_{12}v_2=e_1$ und $a_{21}v_1+a_{22}v_2=e_2$ finden und hat dann die oben geforderten Lösungen $\varphi_1=a_{11}\psi_1+a_{12}\psi_2$ und $\varphi_2=a_{21}\psi_1+a_{22}\psi_2$. Die Koeffizienten a_{ij} findet man offenbar durch Lösen zweier linearer Gleichungssysteme mit zwei Unbestimmten:

$\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=e_1=a_{11}v_1+a_{12}v_2=a_{11}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}+a_{12}\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$, also $a_{11}-a_{12}=1$, $a_{11}+a_{12}=0$, woraus sich $a_{11}=\frac{1}{2}$ und $a_{12}=-\frac{1}{2}$ ergeben.

Entsprechend ergibt sich $a_{21}-a_{22}=0,\ a_{21}+a_{22}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, daher $a_{21}=\frac{1}{2\sqrt{2}},\ a_{22}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Damit haben wir $\varphi_1(t)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\exp(\lambda_1 t)\\ \sqrt{2}\exp(\lambda_1 t)\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\exp(\lambda_2 t)\\ \sqrt{2}\exp(\lambda_2 t)\end{pmatrix}$ und