Übungsklausuraufgaben Mathematik II, Sommersemester 04

Die folgenden Aufgaben sollten in etwa 3 Stunden zu lösen sein, decken aber natürlich den Vorlesungsstoff nicht ab. Dazu wird diese Aufgabensammlung in den nächsten Tagen noch ergänzt. In der eigentlichen Klausur kann dann natürlich wieder nur eine Stoffauswahl getroffen werden.

Aufgabe

a) Berechnen Sie $\int_0^1 f(x)\,dx$ für $f(x) \equiv 1$ als Grenzwert einer Riemann-Summe

b) Sei $G = [1,2] \times [3,5]$. Berechnen Sie $\int_G f(x,y)\,dxdy$ für $f(x,y) \equiv 1$ als Grenzwert einer Riemann Summe.

Aufgabe

Berechnen Sie den Umfang des Einheitskreises anhand der Formel für die Länge einer Kurve.

Aufgabe

Wir betrachten die Parabel $P = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | y = x^2\}$

a) Finden Sie einen Atlas auf *P*, der nur eine einzige Karte besitzt.

b) Wieso ist die durch $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to y$ gegebene Abbildung $P \to \mathbb{R}$ differenzier?

Aufgabe

a) Sei $f(x,y,z) = x^2 y \exp(z)$. Berechnen Sie die 1-Form d*f*.

b) Zeigen Sie: $(x+yz)\,\mathrm{dx} + (y+xz)\,\mathrm{dy} + (z+xy)\,\mathrm{dz}$ ist geschlossen.

c) Ist die 1-Form in b) sogar exakt?

Aufgabe

Sei *G* das von den Punkten $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ begrenzte Dreieck. Zeigen Sie die Gültigkeit der Greenschen Formel $\int_{\partial G} \omega = \int_G \mathrm{d}\omega$ für $\omega = y\,\mathrm{dx}$.

Aufgabe

Betrachten Sie das Vektorfeld $X = xy \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}$ im $\mathbb{R}^2$.

a) Welche Bedingung muß eine Kurve $c: I \to \mathbb{R}^2$ erfüllen, damit sie eine Stromlinie dieses Vektorfeldes ist?

b) Übersetzen Sie das Problem, eine Stromlinie durch den Punkt $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ zu finden, in ein Differentialgleichungssystem der Form $\begin{matrix} t' = f_1(t, x, y) \\ x' = f_2(t, x, y) \\ y' = f_3(x, y, z) \end{matrix}$ mit einer geeigneten Anfangsbedingung.

Aufgabe

Gegeben sei die Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' = f(x, y, y')$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1, y'(0) = 2$. Wie sieht das zugehörige System erster Ordnung aus? Wie das zugehörige Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$? Durch welchen Punkt des $\mathbb{R}^3$ müssen Sie eine Stromlinie finden, um die Differentialgleichung bzw. das Differentialgleichungssystem zu lösen.

Aufgabe

Gegeben sei die nicht-lineare Differentialgleichung $xy' = y + xy$. Finden Sie über einen Potenzreihenansatz eine Lösung mit dem Anfangswert $y(0) = 0$.

Aufgabe

Sei $A = \begin{pmatrix} 9 & -7 & 6 \\ 7 & -5 & 6 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A.
b) Berechnen Sie die Eigenwerte von A.
c) A besitzt einen Eigenwert λ_1 der Vielfachheit 2. Finden Sie eine Basis des erweiterten Eigenraums $E^2_{\lambda_1}$.
d) A besitzt einen zweiten Eigenwert λ_2 der Vielfachheit 1. Finden Sie eine Basis des zugehörigen Eigenraums.
e) Stellen Sie den Vektor $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ als Linearkombination der in c) und d) gefundenen Eigenwerte dar.

f) Sei $c \in E^2_{\lambda_1}$. Berechnen Sie $(\exp(tA))c$